Информация к экзамену «Основы компьютеризации технологий в системах автоматики»

Экзамен будет проводиться в письменной форме (3 академических часа).

Студенты допускаются к зачету при наличии *конспекта лекций*, *отчета по лабораторным работам* с визой «допущен к экзамену» и *зачетной книжки*.

Экзаменационный билет включает в себя следующие задания:

Задание №1	Вопрос из группы «Основные понятия и определения»	
	5 баллов	*10 минут*
Задание №2	Вопрос из группы «Основные понятия и определения»	
	5 баллов	*10 минут*
Задание №3	Вопрос из группы «Комплексные вопросы»	
	25 баллов	*30 минут*
Задание №4	Задача, соответствующая вопросу из группы «Комплексные вопросы»	
	15 баллов	*15 минут*
Задание №5	Задача	
	20 баллов	*30 минут*
Задание №6	Задача	
	30 баллов	*40 минут*

Об оценке за экзамен

Оценка за ответ выставляется следующим образом:

1. Полный ответ по каждому из вопросов оценивается указанным количеством баллов.
2. Неполный ответ или ответ с ошибками может оцениваться частью от указанного количества баллов, но эта часть не может составлять менее 50% от всего количества баллов за вопрос.
3. Баллы за отдельные вопросы суммируются и оценка выставляется по следующей шкале:

от 35 до 45 баллов – 4	*от 75 до 85 баллов – 8*
от 45 до 55 баллов – 5	*от 85 до 95 баллов – 9*
от 55 до 65 баллов – 6	*от 95 до 100 баллов – 10*
от 65 до 75 баллов – 7	

Пример экзаменационного билета:

Задание №1 Что называют алгеброй?

Задание №2 Привести описание математической модели производственной задачи.

Задание №3 Метод прогонки решения системы линейных алгебраических уравнений.

Задание №4 Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 = 4, \\ x_1 + 15x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_2 + 20x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

Выполнить этап прямой прогонки.

Задание №5 В процессе решения задачи линейного программирования

$$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 130, \\ 2x_1 - x_2 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

получена таблица

БП		СП	
		$-x_3$	$-x_5$
$x_4=$	115	0	1
$x_1=$	$8\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_2=$	$6\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Z	0	0	0

Выполнить вторую фазу симплекс-метода.

Задание №6 Решить матричным методом однородную систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = 6x_1 - 12x_2 - x_3, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \frac{\partial x_3}{\partial t} = -4x_1 + 12x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

Вопросы к экзамену (расширенные):

1. Линейные векторные пространства.
2. Линейная зависимость векторов.
3. Базис. Размерность пространства.
4. Координаты вектора.
5. Линейное отображение векторных пространств. Матрица линейного оператора.
6. Подобные преобразования.
7. Собственные элементы линейного оператора. Характеристическое уравнение.
8. Жорданова нормальная форма.
9. Итерационные методы решения СЛАУ.
    1) Что называют бинарной алгебраической операцией?
    2) Что называют алгеброй?
    3) Что такое линейная комбинация векторов?
    4) Какая система векторов называется линейной независимой?
    5) Сформулируйте критерий линейной зависимости векторов.
    6) Что называется базисом линейного пространства?
    7) Что называется разложением вектора по базисным векторам?
    8) Что такое оператор?
    9) Какой оператор называют взаимно однозначным?
    10) Какой оператор называют линейным?
    11) Какие матрицы называют эквивалентными?
    12) Приведите свойства подобных матриц.
    13) Что такое собственный вектор линейного преобразования?
    14) Что такое собственное значение линейного преобразования?
    15) Что такое характеристический многочлен оператора?
    16) Какой линейный оператор называется простым?
    17) Какая матрица называется матрицей простой структуры?
    18) Что представляет собой диагонализация матриц?
    19) Что такое клетка Жордано?
    20) Что называется матрицей Жордано?
    21) Что называется жордановой нормальной формой?
    22) Какая разница между аналитическими и итерационными методами решения задач?
    23) Что такое итерационный процесс?
    24) Что понимается под условием сходимости итерационного процесса?
    25) Что такое число обусловленности матрицы?
10. Матричные дифференциальные уравнения.
11. Фундаментальная система решений. Формула Коши.
12. Матричный метод решения линейных стационарных систем.
13. Общие сведения об обыкновенных дифференциальных уравнениях и их систем.
14. Численные методы решения ОДУ: метод Эйлера и его геометрическая интерпретация.
15. Численные методы решения ОДУ: семейство методов Рунге-Кутты (метод Хойна и его геометрическая интерпретация).
16. Численные методы решения ОДУ: семейство методов Рунге-Кутты (усовершенствованные метод Эйлера и его геометрическая интерпретация).
17. Численные методы решения ОДУ: методы Адамса.
18. Разностная схема решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.
19. Метод прогонки решения СЛАУ.
20. Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных.
21. Метод сеток решений уравнений с частными производными: реализация явной схемы на примере уравнения теплопроводности.
22. Метод сеток решений уравнений с частными производными: реализация неявной схемы на примере уравнения теплопроводности.
23. Аппроксимация, устойчивость, сходимость разностных схем для уравнения теплопроводности.

1) Что есть матричная экспонента?
2) Дайте определение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка?
3) Что такое фундаментальная система решений линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка?
4) Что такое матрица Коши?
5) Что есть стационарная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка?
6) Какое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением?
7) Что называется порядком ОДУ?
8) Что такое решение дифференциального уравнения?
9) Что называется линейным ОДУ?
10) Какая задача называется задачей Коши для ОДУ n-го порядка?
11) Какая задача называется краевой задачей для ОДУ n-го порядка?
12) Сформулируйте теорему Коши.
13) Представьте преобразование линейного ОДУ второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка.
14) Что называется краевой задачей линейного дифференциального уравнения второго порядка?
15) Что называется краевой задачей линейного дифференциального уравнения первого рода?
16) Запишите условия устойчивости метода прогонки для СЛАУ.
17) Приведите классификацию дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.
18) Приведите пример дифференциального уравнения эллиптического типа.
19) Приведите пример дифференциального уравнения параболического типа.
20) Приведите пример дифференциального уравнения гиперболического типа.
21) Какие соотношения используются для замены производных в уравнении теплопроводности в явной схеме.
22) Какие соотношения используются для замены производных в уравнении теплопроводности в неявной схеме.
23) В каком случае разностная схема аппроксимирует исходную задачу?
24) Какая разностная схема называется устойчивой?
25) Какая разностная схема называется сходящейся?

24. Задача линейного программирования. Примеры.
25. Нормальная и каноническая формы ЗЛП и связь между ними.
26. Геометрическая интерпретация ЗЛП.
27. Табличная форма симплекс-метода: симплексная форма задачи.
28. Табличная форма симплекс-метода: проверка условий оптимальности и вычисления шага.
29. Табличная форма симплекс-метода: перерасчет симплексной таблицы.
30. Двухфазный симплекс-метод решения ЗЛП.
31. Транспортная задача: основные понятия, построение начального базисного плана перевозок.
32. Транспортная задача: метод потенциалов решения задачи.
33. Задача математического программирования: необходимые и достаточные условия минимума функции n переменных.
34. Метод множителей Лагранжа для решения задачи математического программирования.

1) Что такое математическая модель задачи?
2) Приведите составляющие математической модели задачи.
3) Что такое градиент функции?
4) Укажите свойства градиента функции.
5) В каких задачах математического программирования возможно использование множителей Лагранжа?
6) Привести постановку производственной задачи.
7) Привести описание математической модели производственной задачи.
8) Привести постановку транспортной задачи.

9) Привести описание математической модели транспортной задачи.
10) Что называется планом задачи линейного программирования?
11) Запишите задачу линейного программирования в нормальной форме.
12) Запишите задачу линейного программирования в канонической форме.
13) Для чего используются дополнительные переменные?
14) Приведите пример графической интерпретации ЗЛП с единственным решением.
15) Приведите пример графической интерпретации ЗЛП с множеством решений.
16) Приведите пример графической интерпретации ЗЛП, в которой целевая функция неограниченно возрастает.
17) Приведите пример графической интерпретации ЗЛП, в которой система ограничений несовместна.
18) Что такое опорный план ЗЛП?
19) Какой опорный план называется вырожденным?
20) Что значит «система ограничений представлена в предпочтительном виде»?
21) Что такое симплексная форма ЗЛП?
22) Какие переменные в симплексной форме называют базисными?
23) Какие переменные в симплексной форме называют небазисными?
24) Сформулируйте достаточное условие оптимальности опорного плана.
25) Как выбирается перспективная переменная в симплекс-методе?
26) Описать суть расчета максимально допустимого шага для изменения перспективной переменной.
27) Сформулируйте признак бесконечности множества оптимальных планов.
28) Сформулируйте признак неограниченности целевой функции.
29) Для чего используются искусственные переменные.
30) Какая цель первой фазы двухфазного симплекс-метода?
31) Какую особенность содержат правила перехода от одной симплексной таблицы к другой на первой фазе?
32) Сформулируйте признак несовместности системы ограничений исходной ЗЛП.
33) Какая модель транспортной задачи называется закрытой?
34) Какая модель транспортной задачи называется открытой?
35) Каким образом преобразовать открытую модель транспортной задачи к закрытой модели?
36) Что называют цепью в транспортной задаче?
37) Что называют циклом в транспортной задаче?
38) Какое множество клеток транспортной задачи в табличной форме называют полным?
39) Какой план перевозок называют базисным?
40) Суть построения начального плана перевозок по правилу северо-западного угла.
41) Суть построения начального плана перевозок по правилу минимального элемента.
42) Сформулируйте признак оптимальности базисного плана перевозок.
43) Как выбирается перспективная клетка в таблице транспортной задачи?

Задачи для самостоятельной работы
и подготовке к экзамену по разделу
«Векторные пространства и элементы теории матриц»

Задача 1

Образует ли линейное пространство заданное множество M, в котором определены «сумма» $a \oplus b$ любых двух элементов a и b и «произведение» $\alpha \odot b$ любого числа α ($\alpha \in R$) на любой элемент a.

- M: множество всех векторов, лежащих на одной оси,
  $a \oplus b$: сумма векторов $a + b$,
  $\alpha \odot b$: произведение числа на длину вектора $\alpha \cdot |a|$;
- M: множество всех диагональных матриц $a = \|a_{ij}\|$ порядка n ($i, j = 1, 2, \ldots, n$),
  $a \oplus b$: произведение матриц $\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|$,
  $\alpha \odot b$: произведение числа на матрицу $\alpha \cdot \|a_{ij}\|$.

Пример

- M: множество всех векторов, лежащих на одной оси,
  $a \oplus b$: сумма векторов $a + b$,
  $\alpha \odot b$: произведение числа на вектор $\alpha \cdot a$.

1. введенные таким образом операции являются замкнутыми в данном множестве M, т.к. сумма двух векторов лежащих на одной оси есть вектор лежащий на той же оси и произведение вектора на число также будет вектором на той же оси.

2. проверим выполнение аксиом линейного пространства:

I группа	1)	$a + b = b + a$	выполняется
	2)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	выполняется
	3)	$a + 0 = a$	здесь 0 – нуль-вектор
	4)	$a + (-a) = 0$	здесь $-a$ – противоположный вектор
II группа	1)	$\alpha \cdot(\beta \cdot a) = (\alpha \cdot\beta) \cdot a$	выполняется
	2)	$1 \cdot a = a$	выполняется
III группа	1)	$(\alpha + \beta)\cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$	выполняется
	2)	$\alpha \cdot(a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$	выполняется

Т.е. множество M, в котором определены «сумма» $a \oplus b$ и «произведение» $\alpha \odot b$, является линейным пространством.

Задача 2

Исследовать на линейную зависимость систему векторов

- $a = \{5, 4, 3\}$, $b = \{3, 3, 2\}$, $c = \{8, 1, 3\}$;
- $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \sin(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.

Пример

- $a = \{1, -1, 2\}$, $b = \{-1, 1, -1\}$, $c = \{2, -1, 1\}$.

Вычислим определитель матрицы, составленный из координат данных векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - 4 - 1 - 1 = -1 \neq 0.$$

Так как определитель не равен нулю, то данная система векторов линейно независима.

Пример

- $f_1(x) = 1 + x + x^2$, $f_2(x) = 1 + 2x + x^2$, $f_3(x) = 1 + 3x + x^2$ на $(-\infty, +\infty)$.

Составим определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+2x+x^2 & 1+3x+x^2 \\ (1+x+x^2)' & (1+2x+x^2)' & (1+3x+x^2)' \\ (1+x+x^2)'' & (1+2x+x^2)'' & (1+3x+x^2)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+2x+x^2 & 1+3x+x^2 \\ 1+2x & 2+2x & 3+2x \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & 2x \\ 1+2x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(2x-2x) = 0$$

Так как определитель равен нулю на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$, то данная система функций линейно зависима.

Задача 3

Найти базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

- $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

Пример

- $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

Выпишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 6 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 5 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 6 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -22 & 18 & -14 & 24 \\ 0 & -22 & 18 & -14 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & -22 & 18 & -14 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Положим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3c_1 - 2c_2 + 5c_3, \\ -22x_2 = -18c_1 + 14c_2 - 24c_3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{11}c_1 + \frac{6}{11}c_2 - \frac{5}{11}c_3, \\ x_2 = \frac{9}{11}c_1 - \frac{7}{11}c_2 + \frac{12}{11}c_3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

Таким образом, размерность линейного пространства решений равна 3, а базис пространства решений есть система векторов:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ -\frac{7}{11} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{12}{11} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4

Найти размерность и базис линейной оболочки векторов:

- $v_1 = \{1, 0, 0, -1\}$, $v_2 = \{2, 1, 1, 0\}$, $v_3 = \{1, 1, 1, 11\}$, $v_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, $v_5 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Справка

Множество $L(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \middle| \forall \alpha_i \in P,\ i = \overline{1, n} \right\}$ называется линейной оболочкой векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Задача 5

Найти разложение вектора x по заданному базису v:

- $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $v = \{v_1, v_2, v_3\}$, где $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $x = 3\sin(x) + 2\cos(x)$ и $v = \{v_1, v_2\}$, где $v_1 = -\sin(x) + \cos(x)$, $v_2 = \sin(x)$.

Задача 6

Пусть векторы $\{v_1, v_2, v_3\}$ и x заданы своими координатами в некотором базисе. Доказать, что векторы V есть базис пространства и найти координаты вектора x в этом базисе.

- $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 7

Найти координаты вектора x в базисе $w = (w_1, w_2, w_3)$, если он задан в базисе $v = (v_1, v_2, v_3)$:

- $\begin{cases} w_1 = v_1 + v_2 + 2v_3, \\ w_2 = 2v_1 - v_2, \\ w_3 = -v_1 + v_2 + v_3; \end{cases}$ $x_v = \{6, -1, 3\}$.

Пример

- $\begin{cases} w_1 = v_1 + v_2 - 5v_3, \\ w_2 = (5/6)v_1 - v_2, \\ w_3 = -v_1 + v_2 + v_3; \end{cases}$ $x_v = \{1, -6, 6\}$.

Переход от первого базиса v ко второму базису w задается матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5/6 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -5 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Переход от второго базиса к первому задается обратной матрицей A^{-1}.
Переход от координат вектора относительно первого базиса x_v к координатам этого же вектора относительно второго базиса x_w осуществляется так же с помощью матрицы A^{-1}.
Найдем обратную матрицу. Вычисляем определитель:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 5/6 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -5 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1-\frac{25}{6}+5-\frac{5}{6}=-1.$$

Находим алгебраические дополнения.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{vmatrix}=-6;\ A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 0\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5/6 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-\frac{5}{6};\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -5 & 1\end{vmatrix}=-4;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 5/6\\ -5 & 0\end{vmatrix}=-\frac{25}{6};$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5/6 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{6};\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 5/6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{11}{6}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -5/6 & -1/6\\ -6 & -4 & -2\\ -5 & -25/6 & -11/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5/6 & 1/6\\ 6 & 4 & 2\\ 5 & 25/6 & 11/6\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x_w=A^{-1}\cdot x_v=\begin{pmatrix}1 & 5/6 & 1/6\\ 6 & 4 & 2\\ 5 & 25/6 & 11/6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5+1\\ 6-24+12\\ 5-25+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -6\\ -9\end{pmatrix}.$$

Значит, координаты вектора x в базисе w будут x_w = {–3, –6, –9}.

Задача 8

Найти матрицу перехода от базиса v к базису w:

- $v=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ w=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$

Задача 9

Пусть $x=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$. Являются ли линейными следующие преобразования:

- $Ax=\{6x_1-5x_2-4x_3,\ -3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3\}$,
  $Bx=\{6-5x_2-4x_3,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2\}$,
  $Cx=\{x_3^4,\ 3x_1-2x_2-x_3,\ x_2+2x_3\}$.

Пример

- $Ax = \{3x_1 - 2x_2 - 1,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$,
  $Bx = \{3x_1^2 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ 0\}$,
  $Cx = \{3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$.

При линейном преобразовании *L* координаты получившегося вектора *Lx* будут линейными комбинациями координат исходного вектора *x*.
Преобразования *Ax* и *Bx* не являются линейными, поскольку
(*а*) в преобразовании *Ax* присутствует свободный член,
(*б*) в преобразовании *Bx* присутствует нелинейное слагаемое.
Преобразование *Cx* будет линейным, поскольку при линейном преобразовании координаты получившегося вектора есть линейная комбинация координат исходного вектора.
Матрица линейного оператора *C*:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 10

Дано: линейный оператор A: $V \to W$, v – базис в линейном пространстве $V = R^2$, соответственно w – базис в $W = R^2$, матрица оператора A_v в базисе v. Найти матрицу A_{vw}, с помощью которой вектор пространства V, заданный в базисе v, преобразуется в вектор пространства W, заданный в базисе w.

- $v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},\ w = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},\ A_v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Пример

- $v = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},\ w = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},\ A_v = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Найдем координаты векторов базиса пространства V после преобразования A в базисе v:

$$Ax_v = A_v \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Затем определим матрицу перехода от базиса Ax_v к базису w:

$$A \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу A_{vw}:

$$A_{vw} = A \cdot A_v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 11

Доказать, что существует единственное линейное преобразование A трехмерного пространства $V = R^3$, переводящее векторы v соответственно в w. Найти матрицу преобразования A в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

- $v = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\ w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

Задача 12

Линейное преобразование A: $V \to V$ в некотором базисе v имеет матрицу A_v. Получить матрицу этого преобразования базисе w:

- $V = R^2$, $v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $w = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $A_v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- V – многочлены второй степени, $v = \{1, x, x^2\}$, $w = \{3x^2 + 2x + 1,\ x^2 + 3x + 2,\ 2x^2 + x + 3\}$, $A_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 13

Линейное преобразование A: $V \to V$ ($V = R^3$) в некотором базисе v имеет матрицу A_v. Получить матрицу этого преобразования в базисе w:

- $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} w_1 = v_1 - v_2 - v_3, \\ w_2 = 2v_1 + v_2 + 3v_3, \\ w_3 = v_2 + 2v_3. \end{cases}$

Пример

- $A_v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} w_1 = v_1 - v_2 + v_3, \\ w_2 = -v_1 + v_2 - 2v_3, \\ w_3 = -v_1 + 2v_2 + v_3. \end{cases}$

Матрица в базисе w находится по формуле

$$A_w = M^{-1} \cdot A_v \cdot M ,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу M^{-1}.
Определитель матрицы M:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 1 + 4 - 1 = 1.$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обратная матрица:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу в новом базисе:

$$A_w=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 7 & -4\\ 7 & 4 & -3\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 14

Доказать, что в пространстве существует единственный оператор A, переводящий векторы v соответственно в векторы w. Найти матрицу этого оператора в базисе, состоящем из единичных векторов.

- $v=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$, $w=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Задача 15

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

- $\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

Пример

- $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение и найдем его решение:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ -1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow(2-\lambda)^2(1-\lambda)-(1-\lambda)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=3.$$

Собственные значения: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$.

Найдем собственные вектора:

$$\lambda_{1,2}=1:\quad\begin{cases}2x_1-x_3=x_1,\\ x_1+x_2-x_3=x_2,\\ -x_1+2x_3=x_3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1-x_3=0,\\ -x_1+x_3=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=c_1,\\ x_2=c_2,\\ x_3=c_1.\end{cases}$$

$$\lambda_3=3:\quad\begin{cases}2x_1-x_3=3x_1,\\ x_1+x_2-x_3=3x_2,\\ -x_1+2x_3=3x_3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_3=0,\\ x_1-2x_2-x_3=0,\\ -x_1-x_3=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=c_1,\\ x_2=c_1,\\ x_3=-c_1.\end{cases}$$

Собственные вектора:

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Задача 16

Выяснить, можно ли заданную матрицу привести к диагональному виду путем перехода к новому базису над полем R. Найти этот базис и соответствующий вид диагональной матрицы.

- $\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

Задача 17

Выяснить, являются ли подобными между собой матрицы A и B.

- $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&1&1\\1&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\4&-6&15\\3&-3&9\end{pmatrix}$.

Задача 18

Найти нормальную форму Жордана для заданной матрицы A.

- $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$
- $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$
- $A=\begin{pmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{pmatrix}$

Пример

- $\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение и найдем его решение:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&4\\4&-7-\lambda&8\\6&-7&7-\lambda\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1,\ \lambda_3=3.$$

Собственные значения: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=3$.

Определим клетку (или клетки) Жордана для кратного (k = 2) собственного значения $\lambda=-1$.

Вычислим матрицу

$$B=A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&4\\4&-6&8\\6&-7&8\end{pmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы *B*:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} B = 2.$$

Таким образом, количество клеток Жордана: $l(-1) = 3 - \operatorname{rank} B = 3 - 2 = 1$, то есть

$$J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определим клетку (или клетки) Жордана для собственного значения $\lambda = 3$.
Вычислим матрицу

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы *B*:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} B = 2.$$

Таким образом, количество клеток Жордана: $l(3) = 3 - \operatorname{rank} B = 3 - 2 = 1$, то есть

$$J_1(3) = (3).$$

Формируем нормальную форму Жордана для заданной матрицы:

$$J = \operatorname{diag}[J_2(-1),\ J_1(3)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание

Если λ – корень характеристического многочлена матрицы *A* кратности *k*, $l(\lambda)$ – число клеток Жордана, причем $l(\lambda) > 1$, то число $l_m(\lambda)$ клеток $J_m(\lambda)$, где $1 \le m \le k$, определяется по правилу

$$l_m(\lambda) = \operatorname{rank} B^{m+1} - 2\operatorname{rank} B^m + \operatorname{rank} B^{m-1}$$

(по построению $B = A - \lambda E,\ B^0 = E$).

Задача 19

Задан вектор *v*. Найти норму вектора $\|v\|$.

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\|v\|_1$ – ?, $\|v\|_2$ – ?, $\|v\|_\infty$ – ?

Задана матрица *M*. Найти норму матрицы $\|M\|$.

- $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\|M\|_1$ – ?, $\|M\|_e$ – ?, $\|M\|_\infty$ – ?

Задача 20

Известно, что после первого шага решения СЛАУ методом простых итераций был получен вектор $x^{(1)}$. Рассчитать вектор $x^{(2)}$ на следующем шаге итерации, если задана матрица *C* и *d*.

- итерационный метод – метод Якоби, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.9 \\ 4.7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- итерационный метод – метод Зейделя, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 5.65 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы
и подготовке к экзамену по разделу
«Численное решение дифференциальных уравнений»

Задача 1

Решить матричным методом однородную систему линейных дифференциальных уравнений:

- $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = 6x_1 - 12x_2 - x_3, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial t} = -4x_1 + 12x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

Пример

- $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = -x_1 + x_2, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Найдем собственные значения и собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение и найдем его решение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (-1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = \sqrt{2}.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = \sqrt{2}$.

Найдем собственные вектора:

$$\lambda_1 = -\sqrt{2}: \quad \begin{cases} (-1+\sqrt{2})v_1 + v_2 = 0, \\ v_1 + (1+\sqrt{2})v_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = c, \\ v_2 = (1-\sqrt{2})c; \end{cases} \Rightarrow [c=1] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1, \\ v_2 = 1-\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{2}: \quad \begin{cases} (-1-\sqrt{2})v_1 + v_2 = 0, \\ v_1 + (1-\sqrt{2})v_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = c, \\ v_2 = (1+\sqrt{2})c; \end{cases} \Rightarrow [c=1-\sqrt{2}] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1-\sqrt{2}, \\ v_2 = -1. \end{cases}$$

Собственные вектора: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу $T = \{V_1, V_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная матрица $F(t) = \{V_1 e^{\lambda_1 t}, V_2 e^{\lambda_2 t}\} = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} & (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \\ (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} & -e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} & (\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}t} \\ (2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} & -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix};$$

$$A \cdot F(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} & (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \\ (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} & -e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} & (\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}t} \\ (2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} & -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы линейных дифференциальных уравнений примет вид:

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=c_1V_1e^{\lambda_1 t}+c_2V_2e^{\lambda_2 t}=c_1\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} \\ (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \\ -e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^{-\sqrt{2}t}+c_2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \\ c_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}-c_2e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Найти решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с начальным условием:

- $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t}=x_2+1, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t}=-4x_1+5x_2; \end{cases} \qquad x(0)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример

- $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t}=-x_1+2x_2-1, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t}=x_1; \end{cases} \qquad x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные вектора матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение и найдем его решение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow (-1-\lambda)(-\lambda)-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1.$$

Собственные значения: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1.$

Найдем собственные вектора:

$$\lambda_1=-2: \quad \begin{cases} v_1+2v_2=0, \\ v_1+2v_2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=-2c, \\ v_2=c; \end{cases} \Rightarrow [c=1] \Rightarrow \begin{cases} v_1=-2, \\ v_2=1. \end{cases}$$

$$\lambda_3=1: \quad \begin{cases} -2v_1+2v_2=0, \\ v_1-v_2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=c, \\ v_2=c; \end{cases} \Rightarrow [c=1-\sqrt{2}] \Rightarrow \begin{cases} v_1=1, \\ v_2=1. \end{cases}$$

Собственные вектора: $V_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Составим матрицу $T=\{V_1,\ V_2\}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная матрица $F(t)=\{V_1e^{\lambda_1 t},\ V_2e^{\lambda_2 t}\}=\begin{pmatrix} -2e^{-2t} & e^t \\ e^{-2t} & e^t \end{pmatrix}$.

Нормируем фундаментальную матрицу в точке $t=0$:

$$F(0)\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2c_{11}+c_{21} & -2c_{12}+c_{22} \\ c_{11}+c_{21} & c_{12}+c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2c_{11}+c_{21}=1, \\ c_{11}+c_{21}=0, \\ -2c_{12}+c_{22}=0, \\ c_{12}+c_{22}=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{11}=-1/3, \\ c_{12}=1/3, \\ c_{21}=1/3, \\ c_{22}=2/3. \end{cases}$$

Таким образом, фундаментальная матрица, нормированная в точке $t=0$, есть

$$F_0(t)=\begin{pmatrix}-2e^{-2t} & e^t\\ e^{-2t} & e^t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & -\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\\ -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & \frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\end{pmatrix}.$$

<u>Проверка:</u>

$$\frac{\partial F_0(t)}{\partial t}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & \frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\\ \frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & -\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\end{pmatrix};$$

$$A\cdot F_0(t)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & -\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\\ -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & \frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & \frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\\ \frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & -\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\end{pmatrix}.$$

По формуле Коши решение системы неоднородных уравнений принимает вид:

$$x(t)=F_0(t)\cdot F_0^{-1}(0)\cdot x(0)+\int_0^t F_0(t)\cdot F_0^{-1}(\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку для фундаментальной матрицы, нормированной в точке, справедливо равенство $F_0(t)\cdot F_0^{-1}(\tau)=F_0(t-\tau)$, то

$$\int_0^t F_0(t-\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{3}e^{t-\tau} & -\frac{2}{3}e^{-2(t-\tau)}+\frac{2}{3}e^{t-\tau}\\ -\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{3}e^{t-\tau} & \frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}+\frac{2}{3}e^{t-\tau}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\int_0^t\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{3}e^{t-\tau}\\ \frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{3}e^{t-\tau}\end{pmatrix}d\tau=\left.\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{3}e^{t-\tau}\\ \frac{1}{6}e^{-2(t-\tau)}+\frac{1}{3}e^{t-\tau}\end{pmatrix}\right|_0^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t\\ -\frac{1}{6}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы неоднородных уравнений:

$$x(t)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & -\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\\ -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t & \frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t\\ -\frac{1}{6}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t\\ -\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t\\ -\frac{1}{6}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

<u>Проверка:</u>

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t}=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\\ e^{-2t}\end{pmatrix};$$

$$A\cdot x(t)+f(t)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^{-2t}\\ -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-2t}-e^{-2t}+1\\ e^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\\ e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

Задача 3

Дано дифференциальное уравнение первого порядка с начальными условиями:

- $y' = y + t^2 - 2,\ y(0) = -1$.

Найти значение $y(1)$, используя одношаговые численные методы ($h = 1$).

Задача 4

Дано дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями:

- $y'' + 2y' = 1 - 2t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.

Найти значения $y(2)$ и $y'(2)$, используя одношаговые численные методы ($h = 2$).

Пример

- $2y'' + 4y = t - t^2,\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 2$

  Найти значения $y(1)$ и $y'(1)$, используя метод Рунге-Кутты IV порядка ($h = 2$).

Преобразуем дифференциальное уравнение второго порядка в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

- введем замену $z(t) = y'(t)$, тогда $z'(t) = y''(t)$;
- дифференциальное уравнение примет вид

$$2 \cdot z'(t) + 4 \cdot y(t) = t - t^2; \quad y(-1) = 0,\ z(-1) = 2;$$

- сформируем систему

$$\begin{cases} y'(t) = z(t), \\ z'(t) = \dfrac{t - t^2 - 4 \cdot y(t)}{2}; \end{cases} \text{ или } \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = F(t, y, z),\ \begin{pmatrix} y(-1) \\ z(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$y(-1) = 0,\ z(-1) = 2 \qquad F(t, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{t - t^2 - 4 \cdot y}{2} \end{pmatrix}.$$

На начальном шаге полагаем: $x_0 = -1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 2$.

Тогда на следующем шаге имеем:

$$k_1 = h \cdot F(t, y, z) = 2 \cdot F(-1, 0, 2) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \dfrac{-1 - (-1)^2 - 4 \cdot 0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = h \cdot F\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_{1,1}}{2}, z + \frac{k_{1,2}}{2}\right) = 2 \cdot F(0, 2, 1) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{0 - (0)^2 - 4 \cdot 2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = h \cdot F\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_{2,1}}{2}, z + \frac{k_{3,2}}{2}\right) = 2 \cdot F(0, 1, -2) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ \dfrac{0 - (0)^2 - 4 \cdot 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = h \cdot F(t + h, y + k_{3,1}, z + k_{3,2}) = 2 \cdot F(1, -4, -2) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ \dfrac{1 - (1)^2 - 4 \cdot (-4)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) - 4 \\ -2 + 2 \cdot (-8) + 2 \cdot (-4) + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \Delta y \\ z_0 + \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2/3 \\ 2 - 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $y(1) = -2/3,\ y'(1) = z(1) = 1/3$.

Задача 5

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом прогонки:

- $$\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 = 4, \\ x_1 + 15x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_2 + 20x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

Задача 6

Дано дифференциальное уравнение второго порядка с краевыми условиями:

- $y'' + 2y' - y = 1 + t,\ \ y(0) = 1,\ \ y(4) = -2$

Используя схему метода конечных разностей при $n = 4$, сформировать СЛАУ для решения краевой задачи.

Задача 7

Дано однородное уравнение теплопроводности

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0 \le x \le 4,\quad t \ge 0,$

  с условиями $u(x,0) = x^2 + 1,\ 0 \le x \le 4,$ и $u(0,t) = t + 1,\ u(4,t) = 17,\ t \ge 0.$

Найти численное решение на слое $t_1 = 1/8$, используя

- явную двухслойную схему,
- неявную двухслойную схему

при разбиении $n = 4$ интервала $[0,\ 4]$ вдоль оси Ox.

Задачи для самостоятельной работы и подготовке к экзамену по разделу «Методы математического программирования»

Задача 1

Используя метод множителей Лагранжа, найти решение задачи:

- $$3x_1^2+2x_2^2-x_1x_2+2x_1-x_2\to\max;\quad 2x_1+x_2=10.$$
- $$x_1^2+2x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_1-3x_2+2x_3\to\max;\quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=80,\\ -x_1+x_2+2x_3=50.\end{cases}$$

Задача 2

Решить графическим методом задачу линейного программирования:

- $$Z=f(x,y)\to\max\ (\min);\quad \begin{cases}4x+5y\ge 10,\\ x-3y\le 5,\\ 2x-y\ge -1,\\ x\ge 0,\ y\ge 0.\end{cases}$$

с целевыми функциями

- $f(x,y)=-2x+6y$,
- $f(x,y)=5x-y$.

Задача 3

Решить задачу линейного программирования

- $$-x_1+3x_2+2x_3-2x_4\to\max\quad \begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3;\\ 4x_2+5x_3+x_4=4;\\ x_1\ge 0; x_2\ge 0; x_3\ge 0; x_4\ge 0\end{cases}$$
- $$2x_1+x_2-x_3\to\min\quad \begin{cases}2x_1-x_2+x_3\le 1;\\ 4x_1-2x_2+x_3\ge -2;\\ 3x_1+x_3\le 1;\\ x_1\ge 0; x_2\ge 0; x_3\ge 0\end{cases}$$
- $$4x_1+5x_2-3x_3\to\max\quad \begin{cases}x_1-3x_2+2x_3\le 5;\\ -5x_1+4x_2+3x_3\le 7;\\ -x_1+2x_2+7x_3\le 9;\\ x_1\ge 0; x_2\ge 0; x_3\ge 0\end{cases}$$

$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \to \max;$

- $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 130, \\ 2x_1 - x_2 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

- $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$

<u>Задача 4</u>

Решить транспортную задачу, представленную в табличной форме:

-

		B_1	B_2	B_3
		30	**40**	**40**
A_1	**40**	4	2	1
A_2	**30**	1	5	3
A_3	**20**	3	2	7

-

		B_1	B_2	B_3
		30	**40**	**20**
A_1	**40**	2	1	2
A_2	**30**	7	5	4
A_3	**50**	1	3	2

Начальный план построить по правилу

- северо-западного угла,
- минимального элемента.