ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ТЕМА. Определение вида и параметров эмпирической зависимости методом наименьших квадратов.

Цель занятия: изучение метода наименьших квадратов и его реализация в *Excel* и системе *Mathematica*.

Задание:

Для заданного варианта данных $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{1,N}$, подобрать подходящую эмпирическую формулу $\varphi(x, a_1, a_2, ..., a_m)$ и, используя метод наименьших квадратов, найти значения параметров с помощью:

- решения экстремальной задачи

$$\Phi(a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{N} (\varphi(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i)^2 \to \min ;$$

- решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (\varphi(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i) \left. \dfrac{\partial\varphi(x, a_1, a_2, ..., a_m)}{a_1} \right|_{x=x_i} = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{N} (\varphi(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i) \left. \dfrac{\partial\varphi(x, a_1, a_2, ..., a_m)}{a_m} \right|_{x=x_i} = 0 \end{cases} ;$$

- встроенных в вычислительные системы функций и возможностей.

Провести анализ построенных зависимостей с помощью коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} (\varphi(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}, \text{ где } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i .$$

Порядок выполнения работы.

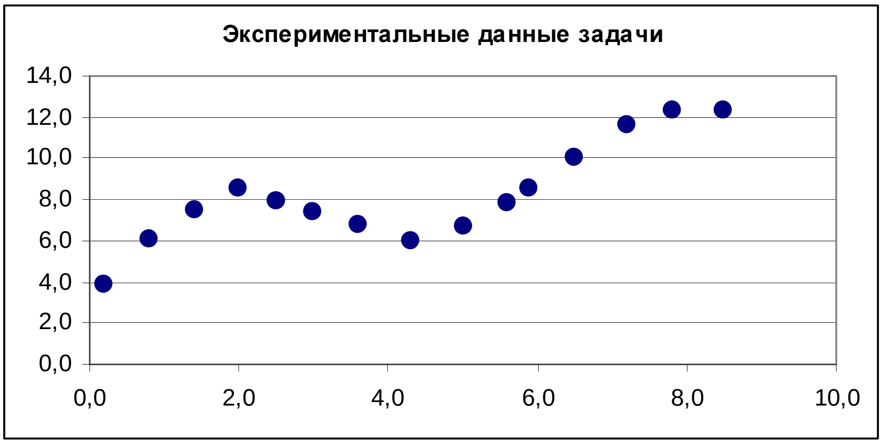
I часть

1. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).
2. Сохранить файл (рабочую книгу) с именем MNK.xls.
3. Добавить листы в рабочую книгу и переименовать их (Данные, Экстр_задача, СЛУ, Встр_функции), на каждом из которых выполняется соответствующий пункт задания.
4. На листе Данные провести анализ данных и сформировать экстремальную задачу и вывести систему линейных уравнений.

Рассмотрим *пример*:

x	0,2	0,8	1,4	2,0	2,5	3,0	3,6	4,3	5,0	5,6	5,9	6,5	7,2	7,8	8,5
y	3,9	6,1	7,5	8,5	7,9	7,4	6,8	6,0	6,7	7,8	8,5	10,0	11,6	12,3	12,3

Построив с помощью *Excel* график заданной зависимости, получаем:



Графическое представление зависимости позволяет предположить, что зависимость может задаваться следующей формулой:

$$y = a + b \cdot \sqrt{x} + c \cdot \sin(x)$$

Экстремальная задача примет вид:

$$\Phi(a,b,c) = \sum_{i=1}^{N} ((a + b \cdot \sqrt{x_i} + c \cdot \sin(x_i)) - y_i)^2 \to \min$$

Определим составляющие системы уравнений:

$$\psi_1(x) = \frac{\partial\varphi(x,a,b,c)}{a} = 1; \;\; \psi_2(x) = \frac{\partial\varphi(x,a,b,c)}{b} = \sqrt{x}; \;\; \psi_3(x) = \frac{\partial\varphi(x,a,b,c)}{c} = \sin(x).$$

Параметры искомой зависимости находятся из системы:

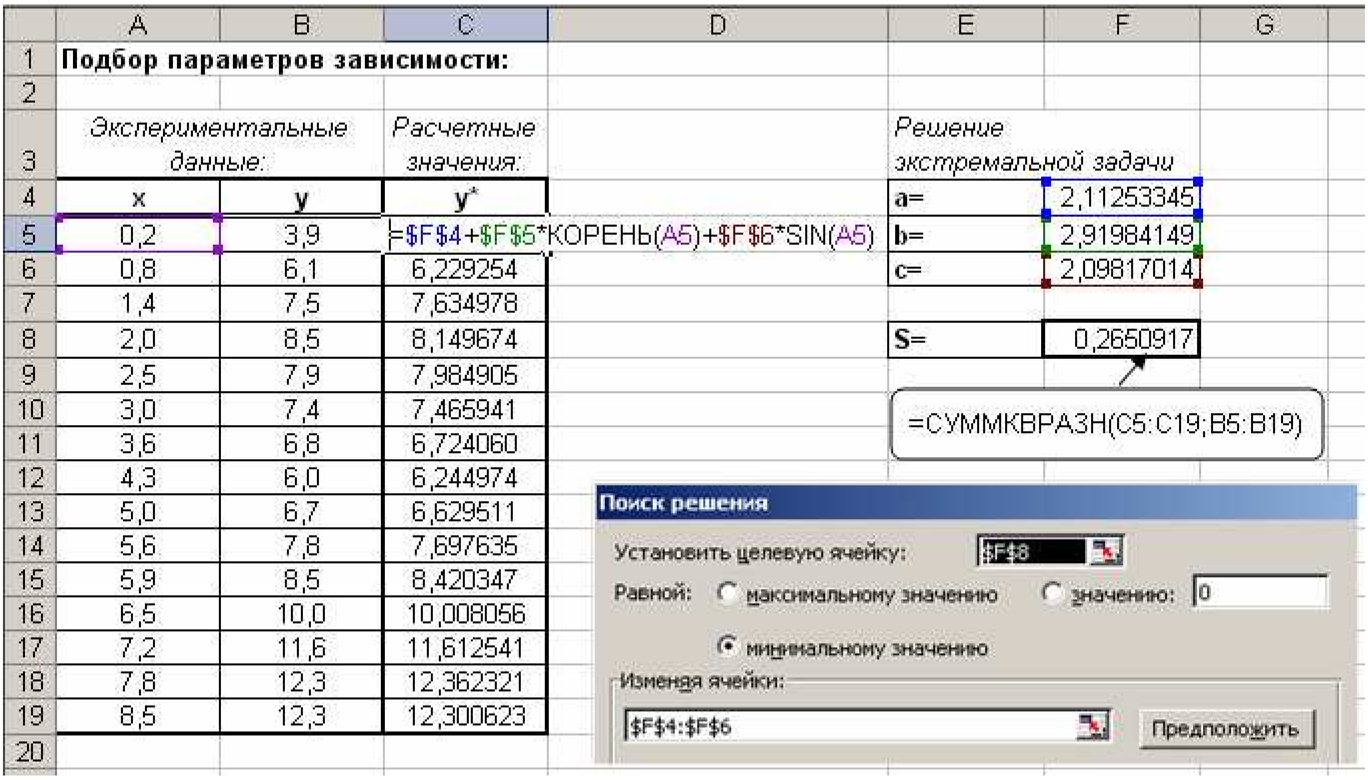
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} ((a + b \cdot \sqrt{x_i} + c \cdot \sin(x_i)) - y_i) \cdot 1 = 0; \\ \sum_{i=1}^{N} ((a + b \cdot \sqrt{x_i} + c \cdot \sin(x_i)) - y_i) \cdot \sqrt{x_i} = 0; \\ \sum_{i=1}^{N} ((a + b \cdot \sqrt{x_i} + c \cdot \sin(x_i)) - y_i) \cdot \sin(x_i) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (a + b \cdot \sqrt{x_i} + c \cdot \sin(x_i) - y_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^{N} (a \cdot \sqrt{x_i} + b \cdot |x_i| + c \cdot \sqrt{x_i} \cdot \sin(x_i) - y_i \cdot \sqrt{x_i}) = 0; \\ \sum_{i=1}^{N} (a \cdot \sin(x_i) + b \cdot \sqrt{x_i} \cdot \sin(x_i) + c \cdot \sin^2(x_i) - y_i \cdot \sin(x_i)) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

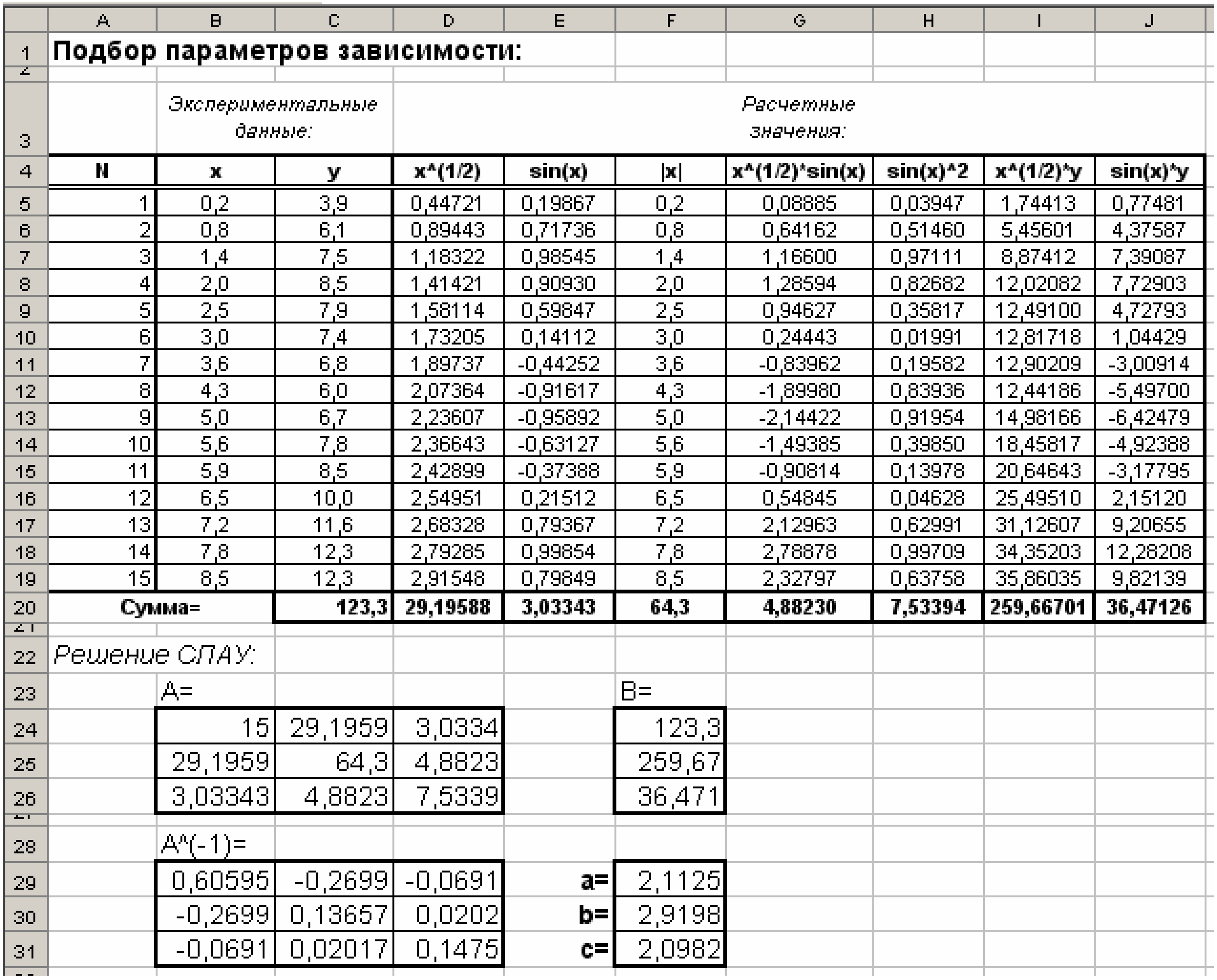
$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot N & + b \cdot \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_i} & + c \cdot \sum_{i=1}^{N} \sin(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i; \\ a \cdot \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_i} & + b \cdot \sum_{i=1}^{N} |x_i| & + c \cdot \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_i} \cdot \sin(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_i} \cdot y_i; \\ a \cdot \sum_{i=1}^{N} \sin(x_i) & + b \cdot \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_i} \cdot \sin(x_i) & + c \cdot \sum_{i=1}^{N} \sin^2(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} \sin(x_i) \cdot y_i. \end{cases}$$

5. Выполним на соответствующих листах задание:

Пример:



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Подбор параметров зависимости:**						
2							
3	*Экспериментальные данные:*		*Расчетные значения:*		*Решение экстремальной задачи*		
4	x	y	y*		a=	2,11253345	
5	0,2	3,9	=$F$4+$F$5*КОРЕНЬ(A5)+$F$6*SIN(A5)		b=	2,91984149	
6	0,8	6,1	6,229254		c=	2,09817014	
7	1,4	7,5	7,634978				
8	2,0	8,5	8,149674		S=	0,2650917	
9	2,5	7,9	7,984905				
10	3,0	7,4	7,465941				
11	3,6	6,8	6,724060				
12	4,3	6,0	6,244974				
13	5,0	6,7	6,629511				
14	5,6	7,8	7,697635				
15	5,9	8,5	8,420347				
16	6,5	10,0	10,008056				
17	7,2	11,6	11,612541				
18	7,8	12,3	12,362321				
19	8,5	12,3	12,300623				
20							



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Подбор параметров зависимости:**									
3		*Экспериментальные данные:*		*Расчетные значения:*						
4	**N**	**x**	**y**	**x^(1/2)**	**sin(x)**	**|x|**	**x^(1/2)*sin(x)**	**sin(x)^2**	**x^(1/2)*y**	**sin(x)*y**
5	1	0,2	3,9	0,44721	0,19867	0,2	0,08885	0,03947	1,74413	0,77481
6	2	0,8	6,1	0,89443	0,71736	0,8	0,64162	0,51460	5,45601	4,37587
7	3	1,4	7,5	1,18322	0,98545	1,4	1,16600	0,97111	8,87412	7,39087
8	4	2,0	8,5	1,41421	0,90930	2,0	1,28594	0,82682	12,02082	7,72903
9	5	2,5	7,9	1,58114	0,59847	2,5	0,94627	0,35817	12,49100	4,72793
10	6	3,0	7,4	1,73205	0,14112	3,0	0,24443	0,01991	12,81718	1,04429
11	7	3,6	6,8	1,89737	-0,44252	3,6	-0,83962	0,19582	12,90209	-3,00914
12	8	4,3	6,0	2,07364	-0,91617	4,3	-1,89980	0,83936	12,44186	-5,49700
13	9	5,0	6,7	2,23607	-0,95892	5,0	-2,14422	0,91954	14,98166	-6,42479
14	10	5,6	7,8	2,36643	-0,63127	5,6	-1,49385	0,39850	18,45817	-4,92388
15	11	5,9	8,5	2,42899	-0,37388	5,9	-0,90814	0,13978	20,64643	-3,17795
16	12	6,5	10,0	2,54951	0,21512	6,5	0,54845	0,04628	25,49510	2,15120
17	13	7,2	11,6	2,68328	0,79367	7,2	2,12963	0,62991	31,12607	9,20655
18	14	7,8	12,3	2,79285	0,99854	7,8	2,78878	0,99709	34,35203	12,28208
19	15	8,5	12,3	2,91548	0,79849	8,5	2,32797	0,63758	35,86035	9,82139
20	**Сумма=**		**123,3**	**29,19588**	**3,03343**	**64,3**	**4,88230**	**7,53394**	**259,66701**	**36,47126**
22	*Решение СЛАУ:*									
23		A=				B=				
24		15	29,1959	3,0334		123,3				
25		29,1959	64,3	4,8823		259,67				
26		3,03343	4,8823	7,5339		36,471				
28		A^(-1)=								
29		0,60595	-0,2699	-0,0691	**a=**	2,1125				
30		-0,2699	0,13657	0,0202	**b=**	2,9198				
31		-0,0691	0,02017	0,1475	**c=**	2,0982				

	A	B	C	D	E	F
1	**Подбор параметров зависимости:**					
2						
3	*Экспериментальные данные:*			*Расчетные значения:*		*Расчетная функция:*
4	**x**	**y**		**ψ2(x)=x^(1/2)**	**ψ3(x)=sin(x)**	**y***
5	0,2	3,9		0,447214	0,198669	3,835168
6	0,8	6,1		0,894427	0,717356	6,229254
7	1,4	7,5		1,183216	0,985450	7,634978
8	2,0	8,5		1,414214	0,909297	8,149674
9	2,5	7,9		1,581139	0,598472	7,984905
10	3,0	7,4		1,732051	0,141120	7,465941
11	3,6	6,8		1,897367	-0,442520	6,724060
12	4,3	6,0		2,073644	-0,916166	6,244974
13	5,0	6,7		2,236068	-0,958924	6,629511
14	5,6	7,8		2,366432	-0,631267	7,697635
15	5,9	8,5		2,428992	-0,373877	8,420347
16	6,5	10,0		2,549510	0,215120	10,008056
17	7,2	11,6		2,683282	0,793668	11,612541
18	7,8	12,3		2,792848	0,998543	12,362321
19	8,5	12,3		2,915476	0,798487	12,300623
20						
21				**c**	**b**	**a**
22				2,098170052	2,919841887	2,112533611
23				0,057077964	0,054926067	0,115697549
24				0,996764175	0,148630329	#Н/Д
25				1848,241405	12	#Н/Д
26				81,6589083	0,265091697	#Н/Д

Встроенные функции и возможности

D22:F26: {=ЛИНЕЙН(B5:B19;D5:E19;1;0)}

<u>*Замечание*:</u> Функция **ЛИНЕЙН()** является формулой массивов. При требовании вывода статистических данных (параметр *статистика* = **ИСТИНА**), результат есть диапазон 5 строк на $m+1$ столбец, где $m+1$ – количество параметров исследуемой зависимости.

В выводимой функцией **ЛИНЕЙН()** таблице результатов представлены следующие значения:

a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	…	a_1	a_0
$\sigma(a_m)$	$\sigma(a_{m-1})$	$\sigma(a_{m-2})$		$\sigma(a_1)$	$\sigma(a_0)$
R^2	$\sigma(y)$	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д
Fрасч	df	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д
SSрег	SSрасч	#Н/Д		#Н/Д	#Н/Д

Здесь

$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$	– параметры исследуемой зависимости;
$\sigma(a_0),\ \sigma(a_1),\ \ldots,\ \sigma(a_m)$	– стандартные отклонения параметров;
$\sigma(y)$	– стандартное отклонение y;
R^2	– коэффициент детерминации;
Fрасч	– F-статистика;
df	– число степеней свободы;
SSрег	– регрессионная сумма квадратов;
SSрасч	– остаточная сумма квадратов.

<u>II часть</u>

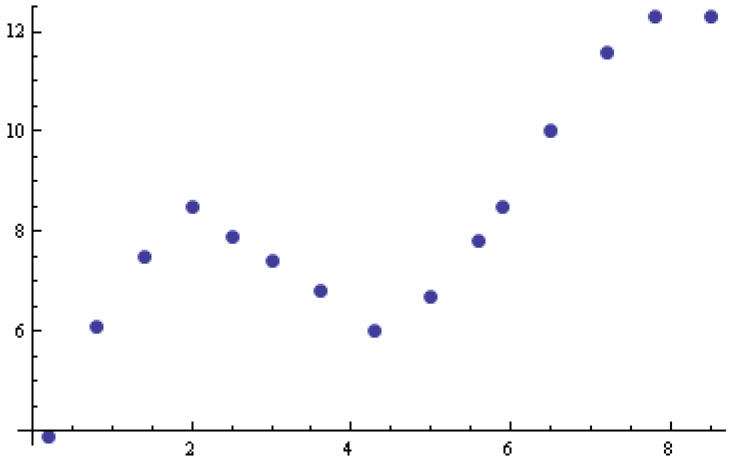
6. Загрузить СКМ Mathematica:

   Сетевые приложения → Математика → Mathematica

7. Сохранить файл с именем MNK.nb.
8. Выполнить пункты задания:

Пример (в системе Mathematica 6.0):

```
M = {{0.2, 3.9}, {0.8, 6.1}, {1.4, 7.5}, {2.0, 8.5}, {2.5, 7.9}, {3.0, 7.4},
    {3.6, 6.8}, {4.3, 6.0}, {5.0, 6.7}, {5.6, 7.8}, {5.9, 8.5}, {6.5, 10.0},
    {7.2, 11.6}, {7.8, 12.3}, {8.5, 12.3}};

gP = ListPlot[M, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



```
<< LinearRegression`

Regress[M, {1, x^(1/2), Sin[x]}, x]
```

{ParameterTable →

	Estimate	SE	TStat	PValue
1	2.11253	0.115698	18.2591	4.02784×10^{-10}
$\sqrt{x}$	2.91984	0.0549261	53.1595	1.33227×10^{-15}
Sin[x]	2.09817	0.057078	36.7597	1.05249×10^{-13}

,

RSquared → 0.996764, AdjustedRSquared → 0.996225, EstimatedVariance → 0.022091,

ANOVATable →

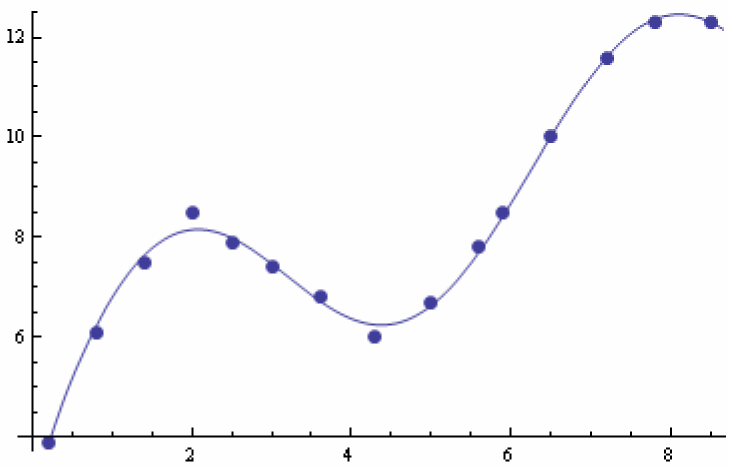
	DF	SumOfSq	MeanSq	FRatio	PValue
Model	2	81.6589	40.8295	1848.24	1.11022×10^{-15}
Error	12	0.265092	0.022091		
Total	14	81.924			

}

```
y = Fit[M, {1, x^(1/2), Sin[x]}, x]
```

$2.11253 + 2.91984\sqrt{x} + 2.09817\,\mathrm{Sin}[x]$

```
Show[gP, Plot[y, {x, 0, 9}]]
```

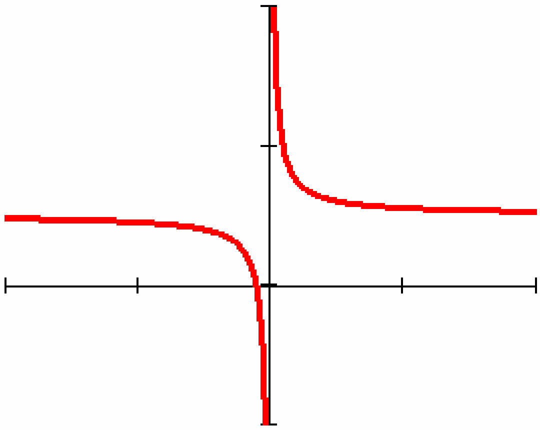


9. Сравнить ответы, полученные в вычислительных системах.

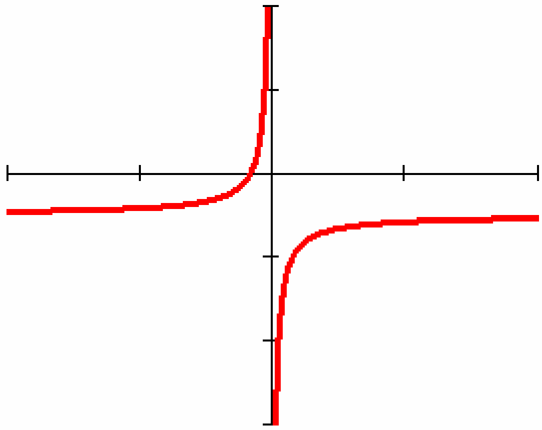
Варианты эмпирических формул и их графики:

$$y=\frac{a}{x}+b \ \ (\textit{гиперболическая зависимость})$$

$a>0$

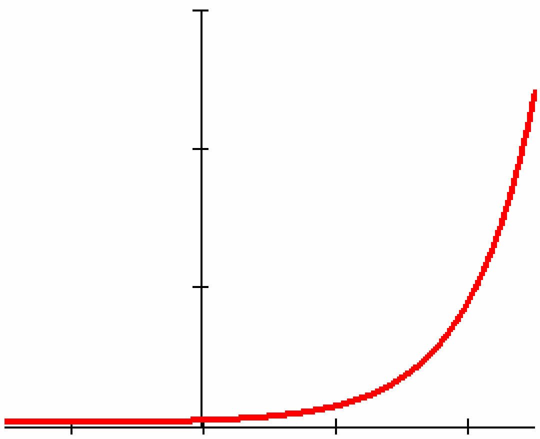


$a<0$

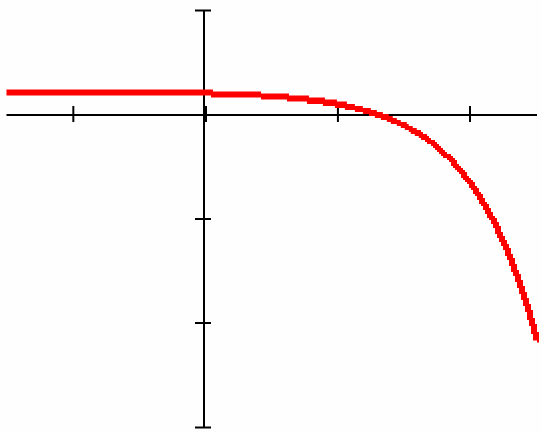


$$y=ae^{x}+b \ \ (\textit{показательная зависимость})$$

$a>0$

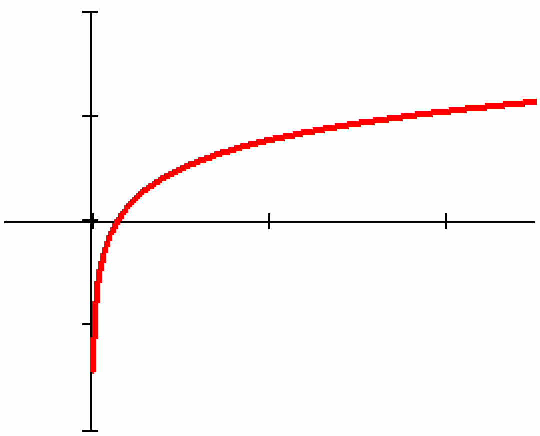


$a<0$

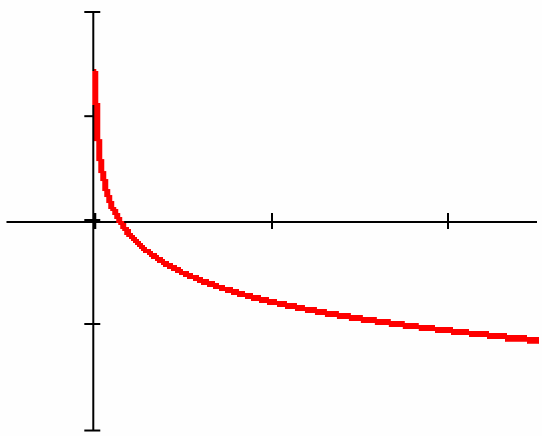


$$y=a\ln(x)+b \ \ (\textit{логарифмическая зависимость})$$

$a>0$

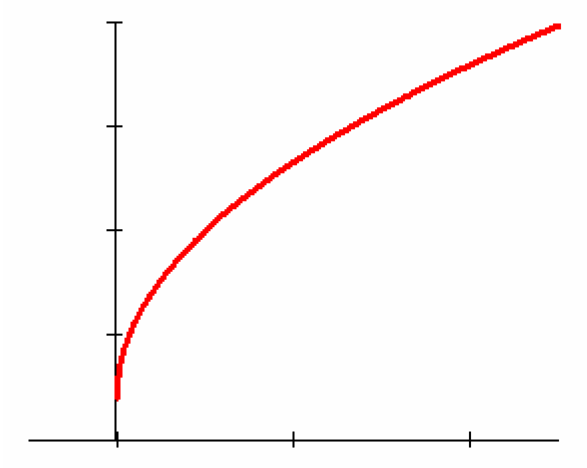


$a<0$

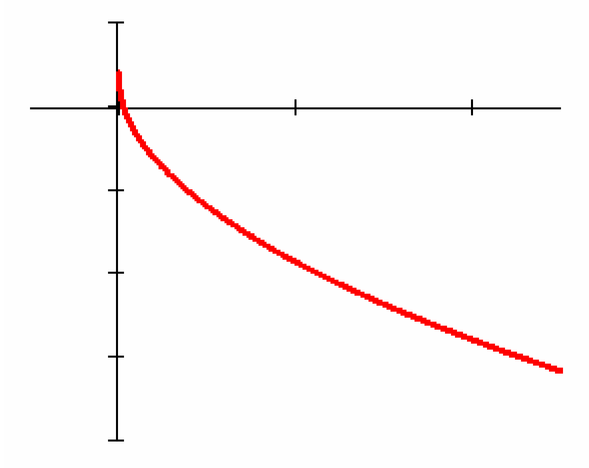


$$y = a\sqrt{x} + b$$

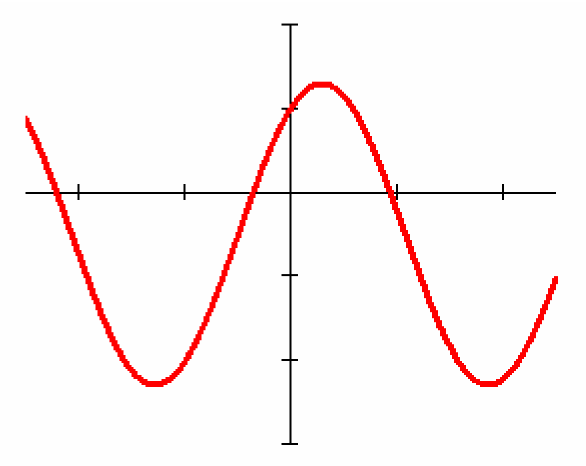
$a > 0$



$a < 0$

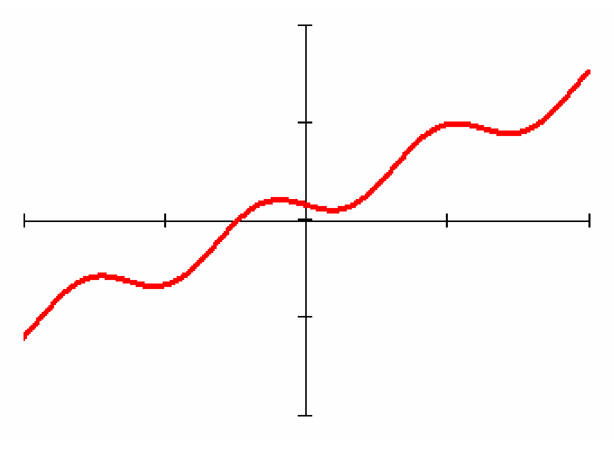


$$y = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) + c$$

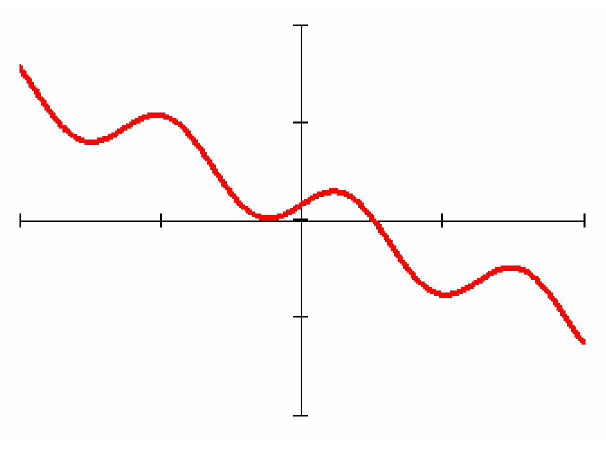


$$y = a \cdot x + b \cdot \sin(x) + c$$

$a > 0$

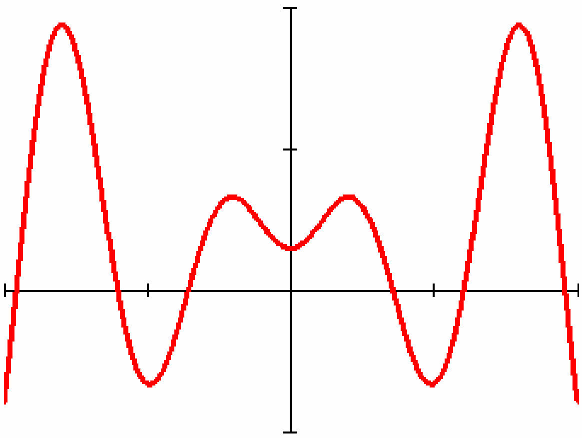


$a < 0$

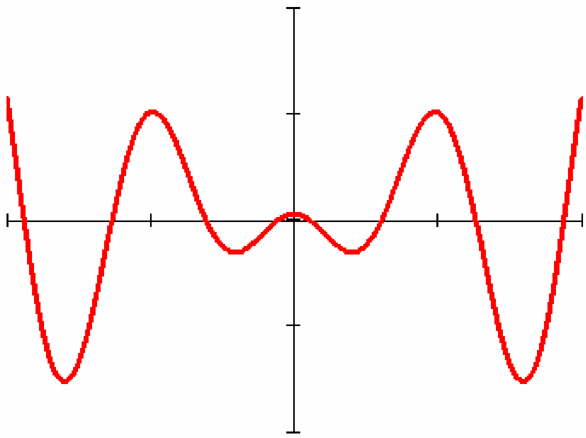


$$y = a \cdot x \cdot \sin(x) + b$$

$a > 0$

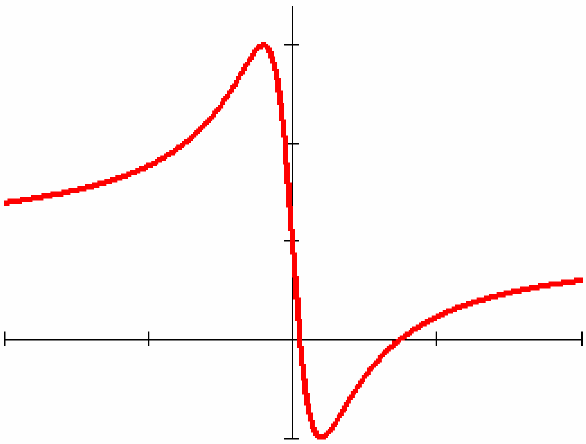


$a < 0$

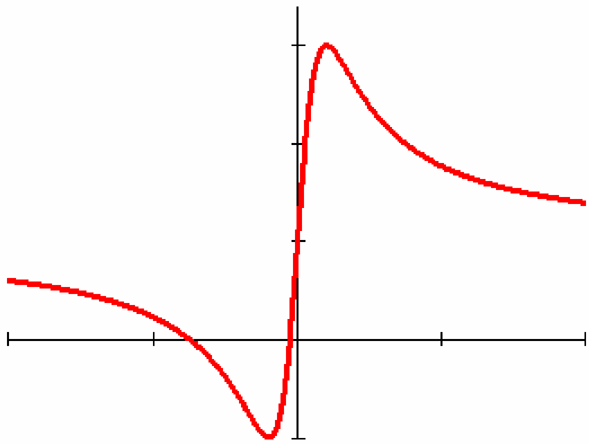


$$y = a\frac{x}{x^2+1} + b$$

$a > 0$

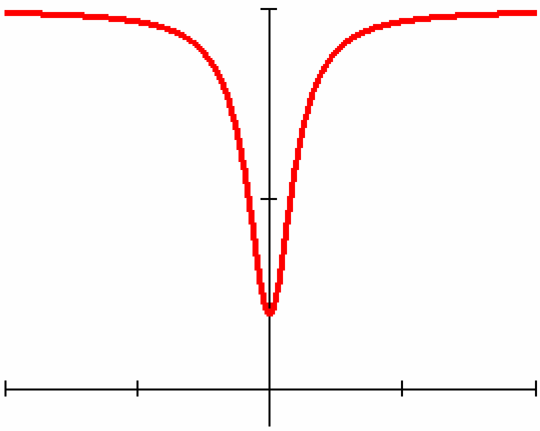


$a < 0$

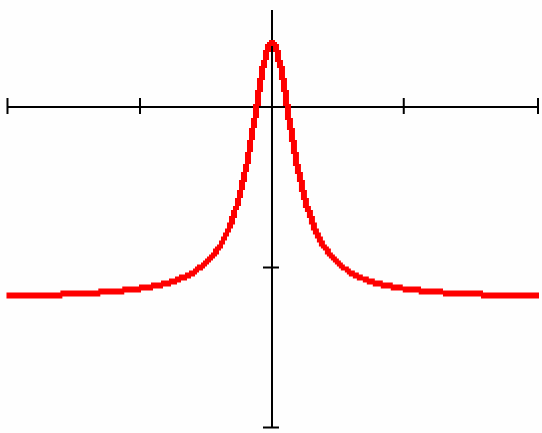


$$y = a\frac{x^2}{x^2+1} + b$$

$a > 0$

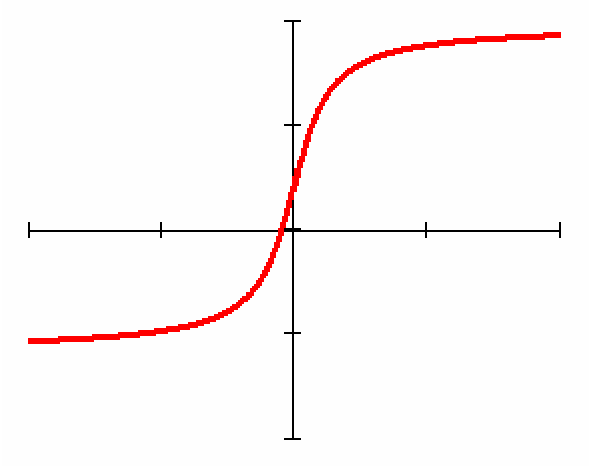


$a < 0$

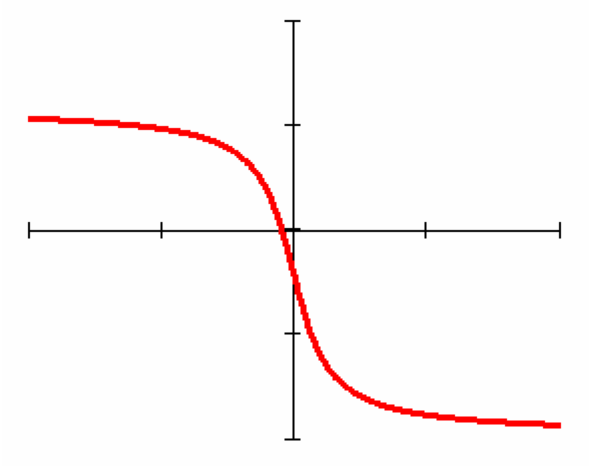


$$y = a \cdot \mathrm{arctg}(x) + b$$

$a > 0$



$a < 0$



Варианты данных:

№ вар	Данные																					
1.	x	0,1	0,3	0,5	0,9	1,3	1,8	2,0	2,5	2,7	3,0	3,2	3,5	4,0	4,2	4,3	4,4	4,9	5,3	5,6	5,8	
	y	-1,4	-1,0	-0,7	-0,3	0,1	0,3	0,6	0,7	0,8	1,1	1,0	1,2	1,4	1,6	1,6	1,7	1,9	2,0	2,2	2,3	
2.	x	-9,4	-9,3	-8,9	-7,6	-7,1	-6,4	-5,4	-4,1	-3,0	-1,1	-0,6	0,6	1,7	2,0	3,8	4,1	5,1	6,6			
	y	-12,6	-12,6	-12,8	-12,7	-12,5	-12,4	-12,5	-12,2	-11,7	-10,3	-9,0	-4,6	-2,7	-2,3	-1,5	-1,6	-1,4	-1,2			
3.	x	0,1	1,0	1,6	2,2	3,1	3,5	3,7	4,2	4,9	5,1	5,3	6,0	6,6	7,3	7,4	7,5	8,2	8,9	9,3		
	y	-9,1	-3,8	-2,5	-1,9	-1,0	-0,9	-0,6	-0,3	0,0	-0,2	-0,2	0,5	0,7	0,8	0,6	0,8	1,1	1,2	1,3		
4.	x	-6,0	-5,2	-4,8	-4,5	-3,5	-2,8	-2,7	-2,5	-2,0	-1,0	-0,2	0,2	1,0	1,8	1,9	2,5	3,3	3,7	4,3	4,4	
	y	9,3	9,6	9,5	9,9	10,2	10,9	10,7	11,3	11,7	15,3	42,1	-27,1	1,1	4,6	4,8	5,5	6,3	6,1	6,4	6,7	
5.	x	-4,8	-3,9	-3,2	-2,7	-1,8	-1,5	-1,0	-0,6	-0,1	0,1	0,7	1,0	1,7	2,7	2,9	3,7	3,8	4,8	5,3	6,0	
	y	16,9	12,6	5,7	0,3	-6,2	-7,1	-7,1	-5,7	-2,9	-2,3	1,6	2,5	2,1	-4,9	-6,8	-15,3	-16,1	-21,7	-21,5	-18,3	
6.	x	-6,4	-6,2	-5,8	-5,3	-5,0	-4,4	-3,5	-3,1	-2,9	-2,4	-2,2	-1,5	-0,5	-0,4	-0,3	0,3	1,3	1,9	2,6	2,9	
	y	-3,0	-6,9	-13,9	-19,2	-20,4	-18,8	-9,0	-5,0	-2,9	0,0	0,3	-0,5	-4,5	-4,6	-5,1	-5,0	-1,2	0,6	-1,0	-3,1	
7.	x	-3,4	-3,3	-2,6	-2,0	-1,7	-1,1	-1,0	-0,2	0,6	1,4	1,5	2,2	2,3	2,5	2,9	3,0	3,1	3,5	3,9		
	y	3,1	3,2	3,3	3,2	3,5	3,3	3,1	3,3	3,3	3,5	3,9	4,3	4,1	4,4	5,1	5,2	5,5	6,5	8,2		
8.	x	-5,0	-4,7	-4,0	-3,9	-3,5	-2,8	-2,7	-2,4	-2,3	-1,8	-1,1	-0,3	0,1	0,6	1,5	2,2	3,2	3,5	3,9	4,5	5,4
	y	-9,5	-9,7	-9,8	-10,2	-10,3	-10,7	-10,8	-11,0	-11,2	-11,3	-13,2	-26,8	12,7	-0,9	-5,4	-6,4	-7,2	-7,2	-7,5	-7,5	-7,9
9.	x	-5,0	-4,2	-3,6	-3,0	-2,4	-1,6	-0,4	0,2	0,8	1,2	1,8	2,6	3,4	3,8	5,0	5,4	5,8	6,6			
	y	10,6	10,5	10,3	10,0	9,6	8,2	2,6	1,6	5,0	7,0	8,7	9,7	10,2	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8			
10.	x	-5,7	-5,1	-4,8	-4,0	-3,5	-2,7	-2,4	-1,6	-1,3	-0,5	-0,1	0,4	0,6	0,9	1,2	1,9	2,9	3,2	3,5		
	y	5,6	5,7	5,5	5,8	6,2	6,3	6,7	7,1	7,5	6,7	5,0	2,0	1,6	1,3	1,2	1,8	2,6	2,7	2,8		
11.	x	-4,5	-3,9	-3,0	-2,6	-2,1	-1,2	-0,7	0,2	0,8	1,1	2,1	2,4	2,9	3,0	3,4	3,8	3,9	4,2			
	y	-3,2	-9,9	-15,1	-14,2	-10,3	1,0	6,8	11,3	8,4	5,7	-6,5	-9,8	-13,9	-14,7	-15,0	-13,8	-12,9	-10,2			

№ вар	*Данные*																					
12.	**x**	-4,0	-3,4	-3,0	-2,2	-2,1	-1,5	-1,1	-0,3	-0,2	-0,1	0,7	1,5	2,4	2,6	3,5	4,0	4,4	5,0	5,7		
	y	1,8	1,7	1,7	1,4	1,2	0,8	0,3	-1,7	-1,8	-1,9	-0,6	0,9	1,4	1,5	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0		
13.	**x**	-3,8	-3,2	-2,2	-2,0	-1,4	-0,9	-0,7	-0,3	0,7	1,5	2,0	2,9	3,7	4,6	5,4	5,9	6,1	7,0	7,8	8,3	9,3
	y	0,2	-2,1	-5,6	-5,7	-5,0	-3,2	-2,1	0,9	7,8	11,4	11,7	9,4	6,2	5,2	7,7	10,8	12,1	18,6	22,1	22,4	19,6
14.	**x**	0,1	0,7	1,2	1,8	1,9	2,9	3,7	4,6	4,7	5,2	5,5	6,2	6,3	7,0	7,6	7,7	8,0	8,1			
	y	3,6	-0,4	-1,4	-2,0	-2,2	-3,3	-3,4	-4,2	-4,3	-4,3	-4,4	-4,7	-4,7	-4,8	-4,8	-5,2	-5,2	-5,1			
15.	**x**	-6,0	-5,5	-5,2	-4,3	-3,8	-3,3	-2,5	-1,6	-1,0	-0,4	0,2	0,3	1,0	1,3	2,2	3,2	3,8	3,9	4,3	4,6	4,8
	y	-1,7	-1,8	-1,8	-1,5	-1,5	-1,5	-1,1	-0,2	1,1	3,5	4,0	3,8	1,1	0,2	-0,9	-1,3	-1,5	-1,5	-1,6	-1,6	-1,7
16.	**x**	-8,0	-7,2	-6,6	-5,0	-3,9	-1,9	-1,6	-0,3	-0,2	1,5	2,6	3,1	3,7	4,0	6,0	6,8	7,8	9,7	11,2		
	y	13,2	13,2	12,9	12,7	12,4	10,9	10,3	5,3	4,2	-3,6	-5,3	-5,5	-5,9	-6,0	-6,7	-6,7	-7,0	-7,0	-7,3		
17.	**x**	-4,4	-4,0	-3,3	-2,3	-1,3	-0,5	0,4	0,5	0,6	1,0	1,2	2,0	2,7	3,5	3,8	4,0	4,4	5,0	5,8	6,1	6,6
	y	25,2	18,8	5,9	-5,6	-3,4	2,1	2,4	2,1	1,3	-1,2	-2,5	-6,4	-2,6	9,5	15,2	18,8	25,1	28,0	17,1	8,9	-7,4
18.	**x**	-3,9	-3,7	-3,4	-2,9	-2,7	-2,2	-2,0	-1,9	-1,4	-1,2	-0,9	-0,7	-0,3	0,1	0,5	0,6	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2
	y	3,0	3,0	2,7	2,8	2,5	2,2	2,2	2,3	1,8	1,5	0,6	0,4	-0,8	-2,9	-5,9	-6,9	-11,6	-18,6	-26,2	-36,3	-44,9
19.	**x**	-1,0	-0,1	0,5	0,9	1,9	2,7	3,0	3,4	4,2	4,8	5,1	5,2	5,4	5,5	6,2	6,9	7,4	7,5	8,2	8,6	
	y	-4,4	6,6	13,1	15,7	14,4	6,8	3,2	-1,6	-7,9	-7,5	-5,8	-5,0	-3,2	-2,5	6,7	13,4	16,1	16,3	14,5	10,9	
20.	**x**	-7,1	-6,7	-5,7	-4,9	-3,9	-3,3	-3,0	-2,3	-2,1	-1,2	-0,8	-0,4	0,1	0,8	1,3	1,4	2,3	2,7	3,6		
	y	0,7	0,7	0,2	0,2	-0,1	-0,1	-0,3	-0,6	-1,0	-1,4	-1,2	-0,5	1,8	4,1	3,9	4,1	3,3	3,2	2,6		

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема. Точные и приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Цель занятия: сформировать представление о точных и приближенных (итерационных) методах решения СЛАУ, выработать умения составлять и применять алгоритмы и программы для решения СЛАУ, дать навыки в использовании СКМ *Mathematica* для решения СЛАУ.

Задание:

В соответствие с вариантом решить СЛАУ:

1) методом Гаусса;
2) приближенным методом
   - простой итерации (Якоби),
   - методом Зейделя

   с заданной точностью ε;
3) с помощью встроенной функции.

Провести сравнительную характеристику результатов решения.

***Порядок выполнения работы** (на примере, реализованном в системе Mathematica 5.1)*.

Найти решение СЛАУ

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33, \\ 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43, \\ 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

10. Загрузить СКМ Mathematica:

    Сетевые приложения → Математика → Mathematica

11. Сохранить файл с именем SLAU.nb.
12. Сформировать решение СЛАУ, используя точный (прямой) метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

    Краткие теоретические сведения о методе Гаусса.

    Прямой ход на *k*-ом шаге ($k = 1, \ldots, m-1$)

    - в качестве ведущего элемента расширенной матрицы $[A, b]$ выбрать максимальный по модулю коэффициент $a_{i^*,k}$ при неизвестной x_k в уравнениях с номерами $i = k+1, \ldots, m$;
    - выполнить перестановку уравнения, соответствующее выбранному коэффициенту с номером i^*, и уравнения с номером *k*, чтобы главный элемент $a_{i^*,k}$ занял место коэффициента $a_{k,k}$;
    - провести преобразование расширенной матрицы $\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j} - \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}} \cdot a_{k,j}$, $\tilde{b}_i = b_i - \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}} \cdot b_k$, $i, j = k+1, \ldots m$;
    - положить $A = \tilde{A},\ b = \tilde{b}$ и перейти к следующему шагу.

    Обратный ход (сформировать решение СЛАУ):

$$x_m = \frac{b_m}{a_{m,m}}; \quad x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{m} a_{i,j} \cdot x_j}{a_{i,i}},\ i = m-1, \ldots, 1.$$

Реализация метода Гаусса в СКМ *Mathematica*.

1) Создать программу MatrChange[], осуществляющую выбор максимального элемента в столбце и перестановку соответствующих строк.

```
MatrChange[a_, k_] :=
 Block[{d, m, n, s, i, j, rw, v, mx},
  d = Dimensions[a];
  m = d[[1]]; n = d[[2]];
  mx = Abs[a[[k, k]]];
  rw = k;
  For[i = k + 1, i ≤ m, i++,
   s = Abs[a[[i, k]]];
   If[mx < s, rw = i, rw = rw];
   If[mx < s, mx = s, mx = mx]];
  v = a;
  For[j = 1, j ≤ n, j++,
   s = v[[k, j]];
   v[[k, j]] = v[[rw, j]];
   v[[rw, j]] = s];
  v]
```

Проверка работы программы MatrChange[]

```
A = {{0, 2, -8, 4}, {0, 5, 6, 2},
   {-3, -5, 7, 5}, {7, 4, 8, 6}};

MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[MatrChange[A, 1]]
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Создать программу PreobrMatr[], возвращающей расширенную матрицу системы, преобразованной к диагональному виду.

```
PreobrMatr[a_, b_] :=
 Block[{d, m, n, v, i, j, k, s},
  v = Transpose[Append[Transpose[a], b]];
  d = Dimensions[v];
  m = d[[1]]; n = d[[2]];
  For[k = 1, k ≤ m - 1, k++,
   v = MatrChange[v, k];
   For[i = k + 1, i ≤ m, i++,
    s = v[[i, k]] / v[[k, k]];
    For[j = k, j ≤ n, j++,
     v[[i, j]] = v[[i, j]] - s * v[[k, j]]
    ]]];
  v]
```

Проверка работы программы PreobrMatr[]

```
A = {{2, 3}, {-7, 5}};
B = {1, -3};

MatrixForm[PreobrMatr[A, B]]
```

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 \\ 0 & \frac{31}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

3) Создать программу MetGauss[],возвращающей решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

```
MetGauss[a_, b_] :=
 Block[{d, m, n, v, i, j, k, r, s},
  v = PreobrMatr[a, b];
  d = Dimensions[v];
  m = d[[1]]; n = d[[2]];
  k = v[[m, n]] / v[[m, m]];
  r = Prepend[{}, k];
  For[i = 1, i ≤ m - 1, i++,
   s = 0;
   For[j = 0, j ≤ i - 1, j++,
    s = s + v[[m - i, m - j]] * r[[i - j]]];
   k = (v[[m - i, n]] - s) / v[[m - i, m - i]];
   r = Prepend[r, k]];
  {v, r}]
```

Проверка работы программы MetGauss[]

```
A={{2,3},{-7,5}};
B={1,-3};
answer = MetGauss[A, B];

M = answer[[1]];
MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 \\ 0 & \frac{31}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

```
x = answer[[2]];
MatrixForm[x]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{31} \\ \frac{1}{31} \end{pmatrix}$$

4) Используя созданные программы сформировать решение заданной СЛАУ. Выполнить проверку.

Решение СЛАУ

Ввод данных

```
a = {{1.23, -3.25, -8.69},
   {7.03, 4.81, 0.27},
   {4.49, -7.55, 12.51}};

b = {10.33, -6.43, 41.53};

MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1.23 & -3.25 & -8.69 \\ 7.03 & 4.81 & 0.27 \\ 4.49 & -7.55 & 12.51 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[b]
```

$$\begin{pmatrix} 10.33 \\ -6.43 \\ 41.53 \end{pmatrix}$$

Формирование решения и его проверка

```
answer=MetGauss[a,b];

M = answer[[1]];
MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} 7.03 & 4.81 & 0.27 & -6.43 \\ 8.88178\times10^{-16} & -10.6221 & 12.3376 & 45.6368 \\ 0. & 8.88178\times10^{-16} & -13.4896 & -6.12403 \end{pmatrix}$$

```
xG = answer[[2]];
MatrixForm[xG]
```

$$\begin{pmatrix} 1.64677 \\ -3.7691 \\ 0.453981 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[a.xG-b]
```

$$\begin{pmatrix} -1.77636\times10^{-15} \\ -3.55271\times10^{-15} \\ 0. \end{pmatrix}$$

13. Сформировать решение СЛАУ, используя приближенные (итерационные) методы с заданной точностью ε.

Краткие теоретические сведения о нормах матрицы.

Выделяют следующие нормы векторов и подчиненные им норм матрицы

Норма вектора	***Норма матрицы***	***Функция в Mathematica***
$\|\| x \|\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|$	$\|\| A \|\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \| a_{i,j} \|$	1 - *норма* Norm[M,1]
$\|\| x \|\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	$\|\| A \|\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \le \|\| A \|\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$ Здесь $\lambda_{\max}$ – максимальное по модулю собственное значение матрицы $A \cdot A^T$.	2 - *норма* Norm[M] или Norm[M,2] *евклидовая норма* Norm[M,“Frobenius”]
$\|\| x \|\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \| x_i \|$	$\|\| A \|\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \| a_{i,j} \|$	∞ - *норма* Norm[M,Infinity]

Общая схема решения СЛАУ итерационным методом.

- Привести исходную систему (соответственно матрицу A и вектор b) к виду с преобладающими диагональными коэффициентами:

$$A \cdot x = b \;\Rightarrow\; \tilde{A} \cdot x = \tilde{b}\text{, где } |\tilde{a}_{i,j}| << |\tilde{a}_{i,i}|, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

- Получить преобразованную систему $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b} \;\Rightarrow\; x = d + C \cdot x$

$$C_{i,j} = -\frac{\tilde{A}_{i,j}}{\tilde{A}_{i,i}},\ i \ne j,\ (C_{i,i} = 0); \quad d_i = \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{A}_{i,i}} \quad i, j = \overline{1,n}.$$

- Проверить условие сходимости итерационного процесса по какой-либо норме матрицы, согласованной с нормой вектора ($\| C \| < 1$).
- Определить критерий достижения заданной точности $\delta = \dfrac{\varepsilon (1 - \| C \|)}{\| C \|}$.
- Вычислить значения итерационной последовательности (N – количество итераций):

нулевой шаг $x^{(0)} = d$,

k-шаг итерации ($k = \overline{1, N}$)

(a) вычислить новый вектор $x^{(k)}$

метод простой итерации (Якоби)

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = d_1 + C_{1,1} \cdot x_1^{(k-1)} + C_{1,2} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + C_{1,n} \cdot x_n^{(k-1)}; \\ x_2^{(k)} = d_2 + C_{2,1} \cdot x_1^{(k-1)} + C_{2,2} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + C_{2,n} \cdot x_n^{(k-1)}; \\ \ldots \\ x_n^{(k)} = d_n + C_{n,1} \cdot x_1^{(k-1)} + C_{n,2} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + C_{n,n} \cdot x_n^{(k-1)}, \end{cases}$$

$$k = \overline{1, N},$$

или

$$x_i^{(k)} = d_i + \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot x_j^{(k-1)}; \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, N},$$

или

$$x^{(k)} = d + C \cdot x^{(k-1)}, \quad k = \overline{1, N}.$$

метод Зейделя

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = d_1 + C_{1,1} \cdot x_1^{(k-1)} + C_{1,2} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + C_{1,n} \cdot x_n^{(k-1)}; \\ x_2^{(k)} = d_2 + C_{2,1} \cdot x_1^{(k+1)} + C_{2,2} \cdot x_2^{(k-1)} + \ldots + C_{2,n} \cdot x_n^{(k-1)}; \\ \ldots \\ x_n^{(k)} = d_n + C_{n,1} \cdot x_1^{(k)} + C_{n,2} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + C_{n,n} \cdot x_n^{(k-1)}, \end{cases}$$

$$k = \overline{1, N},$$

или

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = d_1 + \sum_{j=1}^{n} C_{1,j} \cdot x_j^{(k-1)}; \\ x_i^{(k)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} C_{i,j} \cdot x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} C_{i,j} \cdot x_j^{(k-1)}; \\ \qquad i = \overline{2, n}, \end{cases}$$

$$k = \overline{1, N}.$$

($б$) выполнить проверку окончания итерационного процесса ($\Delta_k \le \delta \Rightarrow$ *истина*), вычислив норму вектора приращения $\Delta_k = \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|, \quad k = \overline{1, N}$.

- Сформировать ответ $x^{(N)}$.

Реализация итерационного метода в СКМ *Mathematica*.

1) Преобразовать СЛАУ к виду с преобладающими диагональными коэффициентами:

$$\begin{cases} (1): \quad 1{,}23x_1 - 3{,}25x_2 - 8{,}69x_3 = 10{,}33; \\ (2): \quad 7{,}03x_1 + 4{,}81x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}43; \\ (3): \quad 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)+(2)+(3): \quad 12{,}75x_1 - 5{,}99x_2 + 4{,}09x_3 = 45{,}43; \\ (1)-(2)-(3): \quad 1{,}31x_1 + 15{,}61x_2 - 3{,}55x_3 = -58{,}29; \\ (3): \quad 4{,}49x_1 - 7{,}55x_2 + 12{,}51x_3 = 41{,}53. \end{cases}$$

2) Создать программу PreobrIter[], осуществляющую преобразование СЛАУ к виду для осуществления итерационного процесса.

Ввод данных, после приведения к "подходящему" виду

```
a = {{12.75, -5.99, 4.09},
    {1.31, 15.61, -3.55},
    {4.49, -7.55, 12.51}};
b := {45.43, -58.29, 41.53};
```

Результат использования процедуры

```
MatrixForm[PreobrIter[a, b][[1]]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.469804 & -0.320784 \\ -0.0839206 & 0 & 0.227418 \\ -0.358913 & 0.603517 & 0 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[PreobrIter[a, b][[2]]]
```

$$\begin{pmatrix} 3.56314 \\ -3.73414 \\ 3.31974 \end{pmatrix}$$

Таким образом, СЛАУ принимает вид

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}4698x_2 - 0{,}32078x_3 + 3{,}56314; \\ x_2 = -0{,}08392x_1 + 0{,}22742x_3 - 3{,}73414; \\ x_3 = -0{,}35891x_1 + 0{,}60352x_2 + 3{,}31974. \end{cases}$$

3) Создать программу MetIter[], осуществляющую итерационный процесс для решения СЛАУ с заданной точностью.

Формирование решения методом Якоби
- норма матрицы

```
MetIter[a, b, 0.001][[1]]
0.935645
```

- количество итераций

```
MetIter[a, b, 0.001][[2]]
18
```

- вектор-решения

```
xI = MetIter[a, b, 0.001][[3]]
{1.64678, -3.7691, 0.453991}
```

Проверка решения

```
MatrixForm[a.xI - b]
```

$$\begin{pmatrix} 0.000163851 \\ -0.000065515 \\ 0.000177066 \end{pmatrix}$$

Формирование решения методом Зейделя
- норма матрицы

```
MetIter[a, b, 0.001][[1]]
0.935645
```

- количество итераций

```
MetIter[a, b, 0.001][[2]]
9
```

- вектор-решения

```
xZ = MetIter[a, b, 0.001][[3]]
{1.64677, -3.7691, 0.453982}
```

Проверка решения

```
MatrixForm[a.xZ - b]
```

$$\begin{pmatrix} 0.0000178955 \\ 0.0000257821 \\ 0. \end{pmatrix}$$

14. Сформировать решение СЛАУ, используя встроенные возможности СКМ *Mathematica*.

Ввод данных

```
a := {{1.23, -3.25, -8.69},
   {7.03, 4.81, 0.27},
   {4.49, -7.55, 12.51}};
b := {10.33, -6.43, 41.53};
```

Решение с использованием функции Mathematica

```
xM = LinearSolve[a, b]
{1.64677, -3.7691, 0.453981}
```

Проверка решения

```
MatrixForm[a.xM - b]
```

$$\begin{pmatrix} -5.32907\times10^{-15} \\ 0. \\ -7.10543\times10^{-15} \end{pmatrix}$$

15. Сравнить решения, полученные различными методами.

```
MatrixForm[xM - xG]
```

$$\begin{pmatrix} 4.44089\times10^{-16} \\ 4.44089\times10^{-16} \\ 0. \end{pmatrix}$$

```
Norm[xM - xG]
```

6.28037×10^{-16}

```
MatrixForm[xM - xI]
```

$$\begin{pmatrix} -8.52739\times10^{-6} \\ 2.76995\times10^{-6} \\ -9.42169\times10^{-6} \end{pmatrix}$$

```
Norm[xM - xI]
0.000013006
```

```
MatrixForm[xM - xZ]
```

$$\begin{pmatrix} -2.06035\times10^{-6} \\ -1.51905\times10^{-6} \\ -1.77286\times10^{-7} \end{pmatrix}$$

```
Norm[xM - xZ]
```

2.56593×10^{-6}

Варианты СЛАУ:

№ вар	**СЛАУ**	**№ вар**	**СЛАУ**
1	$\begin{cases} 7{,}6x_1-2{,}1x_2-0{,}6x_3+3{,}4x_4=14{,}2 \\ -0{,}5x_1+10x_2-3{,}2x_3-1{,}2x_4=-5{,}7 \\ -3{,}5x_1+10x_3+0{,}5x_4=6{,}8 \\ -1{,}2x_1-4{,}3x_2-0{,}4x_3+12{,}1x_4=-21{,}4 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} 7{,}9x_1-1{,}2x_2+3{,}4x_3=-6{,}4 \\ -3{,}4x_1+10{,}8x_2-1{,}7x_3+1{,}8x_4=14{,}2 \\ -1{,}6x_1-3{,}4x_2+8{,}5x_3+3{,}1x_4=-4{,}2 \\ -1{,}2x_1+2{,}6x_2+0{,}8x_3+7{,}5x_4=8{,}3 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8{,}1x_1+0{,}7x_2-3{,}8x_3+2{,}1x_4=-8{,}1 \\ 2{,}2x_1+9{,}2x_2-1{,}1x_3-3{,}3x_4=-6{,}4 \\ -5{,}1x_1+0{,}7x_2+9{,}1x_3+1{,}1x_4=17{,}1 \\ -3{,}3x_1+4{,}1x_2+10x_4=-12{,}1 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 6{,}8x_1+1{,}8x_2-0{,}2x_3-2{,}1x_4=18{,}3 \\ -1{,}6x_1+8{,}8x_2+1{,}4x_3-2{,}7x_4=-6{,}5 \\ -2{,}7x_2+10{,}2x_3+2{,}4x_4=22{,}3 \\ -1{,}2x_1-2{,}1x_2+1{,}8x_3+7{,}5x_4=-11{,}3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 8{,}2x_1+3{,}4x_2+1{,}2x_3-1{,}5x_4=-13{,}3 \\ -1{,}1x_1+7{,}7x_2+1{,}5x_3-3{,}2x_4=8{,}4 \\ -0{,}5x_1+1{,}2x_2+8{,}6x_3+1{,}8x_4=-11{,}6 \\ -1{,}2x_1-0{,}8x_2+10x_4=5{,}7 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} 8{,}7x_1-2{,}7x_2+2{,}2x_3+1{,}8x_4=12{,}1 \\ 2{,}1x_1+10x_2+1{,}5x_3-1{,}8x_4=-3{,}3 \\ -1{,}2x_1-1{,}3x_2+13{,}3x_3=-4{,}8 \\ -3{,}3x_1+0{,}5x_2-0{,}6x_3+12{,}8x_4=-1{,}7 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 7{,}7x_1+0{,}4x_2-2{,}1x_3+1{,}8x_4=12{,}4 \\ -4{,}5x_1+12{,}3x_2-0{,}6x_3=-8{,}8 \\ -2{,}6x_1-3{,}4x_2+11{,}1x_3=6{,}2 \\ -0{,}5x_1+2{,}6x_2-3{,}4x_3+11{,}2x_4=-11{,}7 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 10x_1-2{,}2x_2+1{,}1x_3-3{,}1x_4=27 \\ -3{,}8x_1+10x_2+1{,}2x_3-2{,}2x_4=-15 \\ -1{,}1x_1-2{,}3x_2+10x_3+4{,}1x_4=12 \\ -1{,}7x_1+2{,}1x_2+10x_4=-1{,}7 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 8{,}3x_1-2{,}7x_2+1{,}1x_4=-14{,}2 \\ -1{,}3x_1+11{,}2x_2-0{,}9x_3+0{,}6x_4=4{,}8 \\ -1{,}1x_1-0{,}5x_2+10{,}2x_3-1{,}2x_4=-23{,}4 \\ -1{,}3x_1-1{,}8x_2-2{,}4x_3+5{,}7x_4=7{,}2 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 9{,}3x_1+0{,}8x_2-1{,}1x_3+1{,}8x_4=-5{,}1 \\ -1{,}8x_1+4{,}8x_2-2{,}1x_4=11{,}7 \\ -1{,}3x_1+-3{,}1x_2+10x_3 2{,}1x_4=-10{,}2 \\ -0{,}8x_1+3{,}3x_3+7{,}2x_4=-2{,}8 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 8{,}8x_1+2{,}3x_2-2{,}5x_3+1{,}6x_4=12{,}4 \\ -1{,}4x_1+6{,}6x_2+1{,}8x_3-2{,}4x_4=-8{,}9 \\ -3{,}3x_1-0{,}3x_2+8{,}4x_3+3{,}2x_4=11{,}5 \\ -1{,}2x_1+0{,}5x_2+8{,}5x_4=-5{,}7 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 8{,}5x_1-0{,}5x_2+0{,}8x_3-1{,}4x_4=4{,}8 \\ -3{,}2x_1+11{,}3x_2+1{,}2x_3=12{,}4 \\ -1{,}7x_1-0{,}6x_2+10{,}8x_3-1{,}2x_4=11{,}5 \\ -2{,}1x_1+1{,}6x_2-3{,}6x_3+10x_4=-8{,}8 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 9{,}5x_1+0{,}6x_2+1{,}2x_3-1{,}4x_4=-21{,}7 \\ -0{,}4x_1+11{,}2x_2-0{,}8x_3-1{,}1x_4=14 \\ -3{,}4x_1-0{,}8x_2+10{,}6x_3-1{,}4x_4=-21 \\ -1{,}1x_1-1{,}2x_2+10{,}3x_4=-8 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} 8{,}3x_1-3{,}1x_2+1{,}8x_3-2{,}2x_4=-17{,}1 \\ 10x_2-3{,}3x_3-2{,}2x_4=6{,}2 \\ -3{,}2x_1+1{,}8x_2+9{,}5x_3+1{,}9x_4=-8{,}9 \\ -1{,}2x_1-2{,}8x_2+1{,}4x_3+10x_4=9{,}4 \end{cases}$

№ вар	***СЛАУ***	**№ вар**	***СЛАУ***
8	$\begin{cases} 10{,}5x_1+0{,}5x_2+1{,}3x_3-1{,}4x_4=-21{,}7 \\ -0{,}4x_1+13{,}2x_2-0{,}8x_3-1{,}2x_4=14 \\ -3{,}4x_1+0{,}7x_2+9{,}6x_3-1{,}4x_4=-2 \\ 1{,}1x_1-2{,}2x_2+10{,}3x_4=-17 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 10x_1-2{,}8x_2+1{,}7x_3-0{,}6x_4=2{,}1 \\ -5{,}2x_1+10x_2-1{,}2x_3-x_4=-11{,}7 \\ -1{,}7x_1+1{,}8x_2+7{,}9x_3=-8{,}1 \\ -1{,}1x_1-2{,}2x_2-0{,}3x_3+9{,}5x_4=7{,}2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 9{,}2x_1+0{,}3x_2+0{,}4x_4=-12 \\ 6{,}9x_2-2{,}7x_3+0{,}8x_4=8{,}1 \\ -3{,}3x_1+10{,}7x_3-2{,}1x_4=-9{,}2 \\ -1{,}1x_1-0{,}3x_3+4{,}2x_4=1{,}7 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 5{,}8x_1+3x_2-0{,}3x_3=4{,}4 \\ -1{,}1x_1+12{,}6x_2+3{,}6x_3=14{,}2 \\ -1{,}2x_1-0{,}8x_2+11{,}4x_3+2{,}4x_4=-8{,}3 \\ -1{,}5x_1+3{,}5x_2+1{,}8x_3+10x_4=-14{,}2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 8{,}9x_1+1{,}2x_2-0{,}7x_3=-1{,}2 \\ -0{,}6x_1+12{,}8x_2+0{,}9x_3+3{,}1x_4=15{,}3 \\ -0{,}5x_1+1{,}3x_2+11{,}9x_3+0{,}4x_4=-12 \\ 1{,}7x_1-1{,}2x_2+1{,}5x_3+9{,}1x_4=3{,}1 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} 10x_1-2{,}2x_2-0{,}8x_3-1{,}3x_4=-2{,}2 \\ -0{,}7x_1+13{,}8x_2+0{,}5x_3-4{,}1x_4=18 \\ -0{,}4x_1-1{,}2x_2+8{,}9x_3+0{,}7x_4=-13 \\ -1{,}8x_2+1{,}3x_3+8{,}1x_4=3{,}3 \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ТЕМА. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО И АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Цель занятия: сформировать представление о методах решения задачи Коши, развить навыки проверки полученных результатов с помощью СКМ *Mathematica*.

Задание:

В соответствие с вариантом решить дифференциальное уравнение

$y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ с начальным условием $y(a) = y_0$

1) с помощью встроенной функции для аналитического решения;
2) с помощью встроенной функции для численного решения;
3) численными методами:
   - методом Эйлера

   и

   - усовершенствованным методом Эйлера,
   - методом Рунге-Кутты (2-го порядка или 4-го порядка),
   - методом Адамса при заданном значении *m* (*m* = 1, 2, 3).

Провести сравнительную характеристику результатов решения.

***Порядок выполнения работы** (на примере, реализованном в системе Mathematica 5.1).*

Найти решение дифференциального уравнения

$y'(x) = -2y(x) + 3x\cos(0.7x)$ на отрезке $[0.5, 1.5]$ с начальным условием $y(0.5) = -1.3$.

16. Загрузить СКМ Mathematica:

Сетевые приложения → Математика → Mathematica

17. Сохранить файл с именем DU1.nb.
18. Сформировать аналитическое решение дифференциального уравнения в СКМ *Mathematica* с помощью функции DSOLVE[].

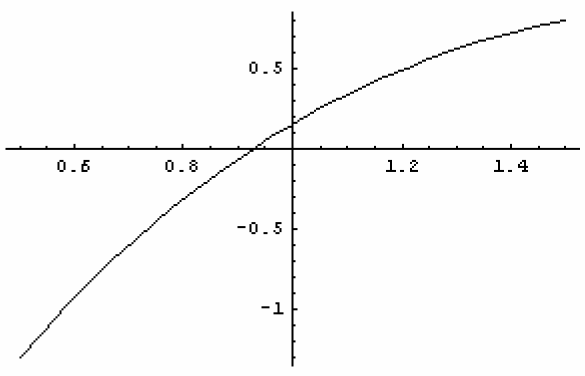
```
Sol1 = DSolve[{y'[x] == -2*y[x] + 3*x*Cos[0.7*x], y[0.5] == -1.3}, y[x], x]
```

$\{\{y[x] \to e^{-2.\,x}(-3.73575 - (0.522319 + 0.\,i)\,e^{2.\,x}\,Cos[0.7\,x] + (1.3363 + 0.\,i)\,e^{2.\,x}\,x\,Cos[0.7\,x] - (0.416665 + 0.\,i)\,e^{2.\,x}\,Sin[0.7\,x] + (0.467706 + 0.\,i)\,e^{2.\,x}\,x\,Sin[0.7\,x])\}\}$

```
YSymb[x_] := y[x] /. Sol1
```

График аналитического решения:

```
Plot[YSymb[x], {x, 0.5, 1.5}]
```



- Graphics -

19. Сформировать численное решение дифференциального уравнения в СКМ *Mathematica* с помощью функции NDSolve[].

<u>*Синтаксис функции*</u>

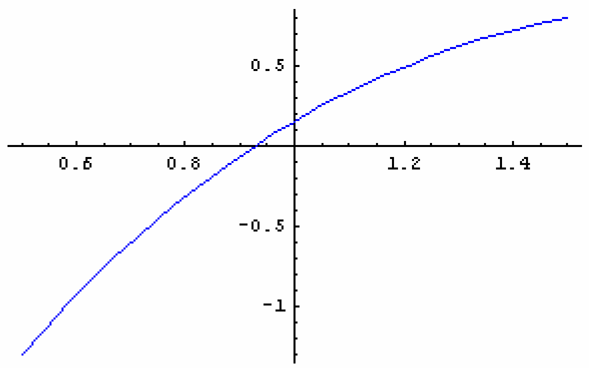
NDSolve[*eqns*, *y*, {*x*, *xmin*, *xmax*}]

где *eqns* – список из уравнения (уравнений) и начальных (краевых) условий;
y – функция (список функций), относительно которой ищется решение уравнения;
{*x*, *xmin*, *xmax*} – переменная, от которой зависит искомая функция, и границы её изменения.

```
Sol2 = NDSolve[{y'[x] == -2*y[x] + 3*x*Cos[0.7*x], y[0.5] == -1.3}, y[x], {x, 0.5, 1.5}]

{{y[x] → InterpolatingFunction[{{0.5, 1.5}}, <>][x]}}

YNum[x_] := y[x] /. Sol2
```

Графики аналитического и численного решения:

```
Plot[{YSymb[x], YNum[x]}, {x, 0.5, 1.5},
 PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```




```
- Graphics -
```

20. Используя метод Эйлера, сформировать численное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, на заданном отрезке при различном количестве разбиений *n*.

Краткие теоретические сведения о методе Эйлера.

По определению производная функции определяется соотношением

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

То есть

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \Rightarrow y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x).$$

Поскольку $y'(x) = f(x, y)$, то из последнего выражения следует рекуррентная формула метода Эйлера первого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \;\; x_{i+1} = x_i + h, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Реализация метода Эйлера в СКМ *Mathematica*.

1) Создать программу MetEuler[], реализующий метод Эйлера для решения дифференциального уравнения.

```
MetEuler[a_, b_, y0_, n_] := Block[{i, x, y, h, T},
  x = a; y = y0;
  T = {{x, y}};
  h = (b - a) / n;
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   y = y + h * Fxy[x, y];
   x = x + h;
   T = Append[T, {x, y}]];
  T]
```

2) Используя созданную программу сформировать решение заданного дифференциального уравнения при n = 4, 8, 6 и 32.

Правая часть диффереццнального уравнения

```
Fxy[x_, y_] = -2 * y + 3 * x * Cos[0.7 * x]
```

```
-2 y + 3 x Cos[0.7 x]
```

Форирование численного решения для n=4

```
Sol3n4 = MetEuler[0.5, 1.5, -1.3, 4]
```

```
{{0.5, -1.3},
 {0.75, -0.297735}, {1., 0.337877},
 {1.25, 0.74257}, {1.5, 0.97222}}
```

Интерполирование полученной таблицы значений

```
YEn4 = Interpolation[Sol3n4]
```

```
InterpolatingFunction[{{0.5, 1.5}}, <>]
```

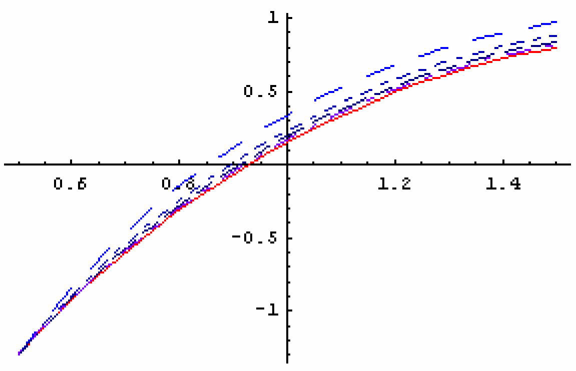
Форирование численного решения для различных значениях n

```
Sol3n8 = MetEuler[0.5, 1.5, -1.3, 8];
YEn8 = Interpolation[Sol3n8]
Sol3n16 = MetEuler[0.5, 1.5, -1.3, 16];
YEn16 = Interpolation[Sol3n16]
Sol3n32 = MetEuler[0.5, 1.5, -1.3, 32];
YEn32 = Interpolation[Sol3n32]
```

```
InterpolatingFunction[{{0.5, 1.5}}, <>]

InterpolatingFunction[{{0.5, 1.5}}, <>]

InterpolatingFunction[{{0.5, 1.5}}, <>]
```

3) Построить графики аналитического и полученных методом Эйлера решений.

```
Plot[{YSymb[x], YEn4[x], YEn8[x], YEn16[x], YEn32[x]}, {x, 0.5, 1.5},
 PlotStyle → { RGBColor[1, 0, 0], {RGBColor[0, 0, 1], Dashing[{0.05, 0.05}]},
   {RGBColor[0, 0, 0.7], Dashing[{0.02, 0.02, 0.01, 0.02}]},
   {RGBColor[0, 0, 0.5], Dashing[{0.05, 0.02, 0.03, 0.02}]},
   {RGBColor[0.5, 0, 1], Dashing[{0.01, 0.03, 0.04, 0.03}]}}]
```




```
- Graphics -
```

21. Используя численный метод решения задачи Коши (в соответствии с вариантом), сформировать численное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, на заданном отрезке при различном количестве разбиений n.

Рекуррентные формулы для реализации численных методов решения дифференциальных уравнений.

Усовершенствованный метод Эйлера второго порядка точности

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i), \;\; y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, \tilde{y}_{i+1} \right),$$

$$x_{i+1} = x_i + h, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод Рунге-Кутты второго порядка точности

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \;\; y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \tilde{y}_{i+1})),$$

$$x_{i+1} = x_i + h, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

$$k1_i = h \cdot f(x_i, y_i), \;\; k2_i = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2} \right),$$

$$k3_i = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2} \right), \;\; k4_i = h \cdot f(x_i + h, y_i + k3_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i),$$

$$x_{i+1} = x_i + h, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод Адамса (m + 1) порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} \cdot f(x_{i-k}, y_{i-k}) =$$

$$= y_i + h \cdot (\alpha_{m,0} \cdot f(x_i, y_i) + \alpha_{m,1} \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \ldots + \alpha_{m,m} \cdot f(x_{i-m}, y_{i-m})),$$

$$x_{i+1} = x_i + h, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Коэффициенты $\alpha_{m,k}$ определяются в зависимости от m и от номера слагаемого

$m = 0: \;\; \alpha_{0,0} = 1;$

$m = 1: \;\; \alpha_{1,0} = \frac{3}{2}, \; \alpha_{1,1} = -\frac{1}{2};$

$m = 2: \;\; \alpha_{2,1} = \frac{23}{12}, \; \alpha_{2,1} = -\frac{4}{3}, \; \alpha_{2,2} = \frac{5}{12};$

$m = 3: \;\; \alpha_{3,0} = \frac{55}{24}, \; \alpha_{3,1} = -\frac{59}{24}, \; \alpha_{3,2} = \frac{27}{24}, \; \alpha_{3,3} = -\frac{3}{8};$

…

Основной недостаток метода Адамса (m > 0) состоит в том, что на начальном шаге кроме y_0 надо знать еще несколько значений $y_1, y_2, \ldots$ Для их определения используются другие численные методы (например, метод Рунге-Кутты). В данной работе для упрощения расчетов необходимые значения можно найти, используя точное аналитическое решение.

Замечание. Для построения таблицы начальных значений можно воспользоваться встроенной функцией TABLE[].

<u>*Синтаксис функции*</u>

TABLE[{*x*, *f*(*x*)}, {*x*, *xmin*, *xmax*, Δ*x*}]

где *f*(*x*) – табулируемая функция;

{*x*, *f*(*x*)} – вид представления результата;

{*x*, *xmin*, *xmax*, Δ*x*} – переменная, от которой зависит искомая функция, границы шаг её изменения.

```
Table[{x, YSymb[x][[1]]}, {x, 0.5, 0.5 + 3 * 0.1, 0.1}]

{{0.5, -1.3 + 0. i}, {0.6, -0.925484 + 0. i}, {0.7, -0.598752 + 0. i}, {0.8, -0.313596 + 0. i}}
```

Воспользуемся функцией RE[] для выделения действительной части комплексной переменной.

```
Table[{x, Re[YSymb[x][[1]]]}, {x, 0.5, 0.5 + 3 * 0.1, 0.1}]

{{0.5, -1.3}, {0.6, -0.925484}, {0.7, -0.598752}, {0.8, -0.313596}}
```

Выполнение работы в СКМ *Mathematica*.

1) Создать программу METRESHDU[], реализующий численный метод решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием на отрезке при заданном количестве разбиений *n*.
2) Используя созданную программу сформировать решение заданного дифференциального уравнения при *n* = 10, 20, 40 и 100.
3) Построить графики аналитического и полученных численным методом решений.

22. Сравнить решения, полученные различными методами при различном количестве разбиений.

Варианты:

№ вар	***задача Коши***	**№ вар**	***задача Коши***
1	$y'(x) = 5.2y(x) + 2.1x^2\cos(-4.3x)$, начальное условие $y(-0.3) = -2.4$, отрезок $[-0.3,\ 0.7]$	**11**	$y'(x) = -5.2y(x) - 1.7x\cos(4.7x)$, начальное условие $y(-0.1) = 3.8$, отрезок $[-0.1,\ 0.9]$
2	$y'(x) = 4.1y(x) + 1.2x\cos(-3.2x)$, начальное условие $y(0.3) = -4.2$, отрезок $[0.3,\ 1.3]$	**12**	$y'(x) = 5.3y(x) + 1.9x\cos(3.7x)$, начальное условие $y(0.4) = -1.8$, отрезок $[0.4,\ 1.4]$
3	$y'(x) = 5.2y(x) - 3.7x^2\cos(1.5x)$, начальное условие $y(0.2) = -1.9$, отрезок $[0.2,\ 1.2]$	**13**	$y'(x) = -1.7y(x) - 2.5x\sin(4.1x)$, начальное условие $y(0.7) = -2.3$, отрезок $[0.7,\ 1.7]$
4	$y'(x) = -3.4y(x) + 1.5x\sin(-2.7x)$, начальное условие $y(-0.2) = -2.3$, отрезок $[-0.2,\ 0.8]$	**14**	$y'(x) = -2.3y(x) - 4.1x\cos(2.4x)$, начальное условие $y(0.1) = -2.7$, отрезок $[0.1,\ 1.1]$
5	$y'(x) = -3.4y(x) + 4.5x\sin(-3.7x)$, начальное условие $y(-0.2) = 2.3$, отрезок $[-0.2,\ 0.8]$	**15**	$y'(x) = 1.5y(x) - 3.4x\sin(-2.7x)$, начальное условие $y(-0.6) = 5.4$, отрезок $[-0.6,\ 0.4]$
6	$y'(x) = 3.7y(x) - 2.1x\cos(4.7x)$, начальное условие $y(0.7) = -3.2$, отрезок $[0.7,\ 1.7]$	**16**	$y'(x) = -4.8y(x) + 1.2x^2\cos(6.7x)$, начальное условие $y(-0.7) = -3.4$, отрезок $[-0.7,\ 0.3]$
7	$y'(x) = 2.8y(x) - 2x^2\sin(1.8x)$, начальное условие $y(0.1) = -1.5$, отрезок $[0.1,\ 1.1]$	**17**	$y'(x) = -2.1y(x) - 5.1x\sin(3.4x)$, начальное условие $y(0.5) = -2.4$, отрезок $[0.5,\ 1.5]$

№ вар	задача Коши	№ вар	задача Коши
8	$y'(x) = -2.7y(x) - 3.1x^2\sin(2.1x)$, начальное условие $y(0.7) = -1.1$, отрезок $[0.7,\ 1.7]$	**18**	$y'(x) = -6.2y(x) - 4.1x\sin(2.7x)$, начальное условие $y(0.4) = 5.3$, отрезок $[0.4,\ 1.4]$
9	$y'(x) = -3.4y(x) + 4.7x\cos(2.2x)$, начальное условие $y(-0.1) = -3.2$, отрезок $[-0.1,\ 0.9]$	**19**	$y'(x) = 4.3y(x) - 5.5x\cos(3.2x)$, начальное условие $y(-0.3) = 4.2$, отрезок $[-0.3,\ 0.7]$
10	$y'(x) = -2.5y(x) + 3.1x\sin(1.4x)$, начальное условие $y(0.2) = -2.1$, отрезок $[0.2,\ 1.2]$	**20**	$y'(x) = -2.7y(x) + 4.5x^2\sin(3.7x)$, начальное условие $y(0.3) = -2.5$, отрезок $[0.3,\ 1.3]$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

ТЕМА. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ.

Цель занятия: изучить метод шагов для решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Задание:

В соответствие с вариантом найти численное решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-h)),\ h > 0, \text{ на отрезке } [a,b],$$

где на начальном множестве $a - h \le t \le a$ задана функция $y(t) = \varphi_0(t)$.

***Порядок выполнения работы** (на примере, реализованном в системе Mathematica 6.0)*.

Найти численное решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$y'(t) = 0.2y(t) + \cos(y(t-1)) \text{ на отрезке } [0, 2.5], \text{ где } y(t) = \frac{1}{t^2+1},\ t \in [-1, 0].$$

23. Загрузить СКМ Mathematica:

    Сетевые приложения → Математика → Mathematica

24. Сохранить файл с именем DUz.nb.
25. Сформировать численное решение дифференциального уравнения в СКМ *Mathematica* с помощью *метода шагов*.

    Краткие теоретические сведения.

    Рассмотрим простейшее *дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом* или *дифференциально-разностное уравнение*, т.е. уравнение вида

    $$y'(t) = f(t, y(t), y(t-h)),\ h > 0, \tag{1}$$

    в котором $y(t)$ – неизвестная функция от независимого аргумента *t*,
    h –запаздывание.

    Таким образом, в уравнении (1) значение производной неизвестной функции в момент *t* определяется не только тем как ведет себя сама функция в этот момент (как это было в обыкновенных дифференциальных уравнениях), но и тем как она вела себя в предыдущий момент $t - h$ (*h* единиц назад).

    Решением дифференциально-разностного уравнения (1) на отрезке $[a,b]$ $(|b-a| > h)$ называется функция $y(t)$, определенная на более широком отрезке $[a-h, b]$, обращающая уравнение (1) в тождество относительно $t \in [a,b]$. Необходимость рассматривать более широкий отрезок связана с тем, что если считать функцию $y(t)$ определенной лишь на отрезке $[a,b]$, то невозможно проверить выполнение уравнения (1) при $t = a$, а также близких к a значениях. Например, при $t = a$ уравнение (1) записывается в виде

    $$y'(a) = f(a, y(a), y(a-h)).$$

    В правую часть этого уравнения входит в этом случае неопределенная величина $y(a-h)$.

    При таком определении понятия решения наблюдается аналогия с обыкновенными дифференциальными уравнениями: решение уравнения (1) на отрезке $[a,b]$ при естественных ограничениях однозначно определяется своими значениями на отрезке $[a-h, a]$. Сформулируем более точно данное утверждение.

    Начальной задачей (или *задачей Коши*) *для дифференциально-разностного уравнения* (1) называется задача о нахождении решения $y(t)$ уравнения (1), совпадающего на отрезке $[a-h, a]$ с заранее заданной функцией $\varphi_0(t)$, т.е. задача о нахождении определенной на $[a-h, b]$ функции $y(t)$, удовлетворяющей условиям

    $$y'(t) = f(t, y(t), y(t-h)),\ t \in [a,b], \tag{2}$$

$$y(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [a-h, a]. \tag{3}$$

Теорема: если функция $f(t, y, z)$ непрерывна и удовлетворяет по второму аргументу условию Липшица:

$$| f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z | \le L \,| y_1 - y_2 |$$

а функция $\varphi_0(t)$ непрерывна на отрезке $[a-h, a]$, то решение задачи (2), (3) существует и единственно на любом промежутке $[a, b]$.

Доказательство этой теоремы существования и единственности основывается на так называемом *методе шагов*. Суть его заключается в следующем:

Шаг 1. Найдем решение задачи (2), (3) на отрезке $[a, a+h]$.

Если $t \in [a, a+h]$, то $t-h \in [a-h, a]$ и в силу условия (3) $y(t-h) = \varphi_0(t-h)$. Поэтому уравнение (2) при $t \in [a, a+h]$ эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y'(t) = f(t, y(t), \varphi_0(t-h)) \overset{def}{=} f_1(t, y(t)). \tag{4}$$

Очевидно, функция $f_1(t, y(t))$ удовлетворяет условиям теоремы Коши и поэтому уравнение (4) имеет на отрезке $[a, a+h]$ единственное решение $\varphi_1(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y(a) = \varphi_0(a)$$

Тогда функция

$$y(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in [a-h, a]; \\ \varphi_1(t), & t \in [a, a+h], \end{cases}$$

является решением задачи Коши (2), (3) на отрезке $[a, a+h]$.

Шаг 2. Определим решение задачи (2), (3) на отрезке $[a, a+2h]$.

Для этого достаточно заметить, что её решение

а) на отрезке $[a, a+h]$ совпадает решением $y(t)$, полученным на шаге 1,

б) на отрезке $[a+h, a+2h]$ совпадает с решением $\varphi_2(t)$ задачи Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \varphi_1(t-h)), \; y(a+h) = \varphi_1(a+h).$$

Таким образом, функция

$$y(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in [a-h, a]; \\ \varphi_1(t), & t \in [a, a+h]; \\ \varphi_2(t), & t \in [a+h, a+2h], \end{cases}$$

является решением задачи Коши (2), (3) на отрезке $[a, a+2h]$.

Продолжая шаги, формируем решение $y(t)$ задачи (2), (3) двигаясь вправо, пока на некотором шаге k значение $b \in [a+(k-1)\cdot h, a+k\cdot h]$. На этом шаге задача Коши решается на отрезке $[a+(k-1)\cdot h, b]$.

Реализация решения задачи в СКМ *Mathematica*.

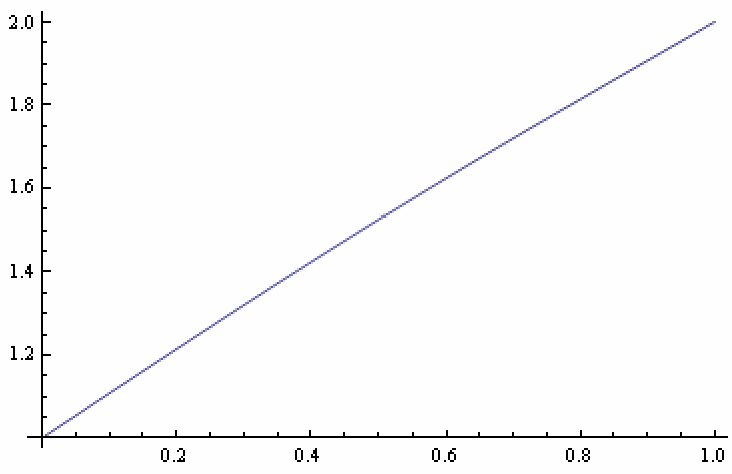
1) Последовательно выполнить шаги метода, используя для решения задачи Коши функцию NDSolve[]. Для каждого шага представить график решения.

Шаг 1. Найти численное решение $y = \varphi_1(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'(x) = 0.2y(t) + \cos\left(\frac{1}{(t-1)^2+1}\right) \text{ на отрезке } [0,1] \text{ с начальным условием } y(0) = 1.$$

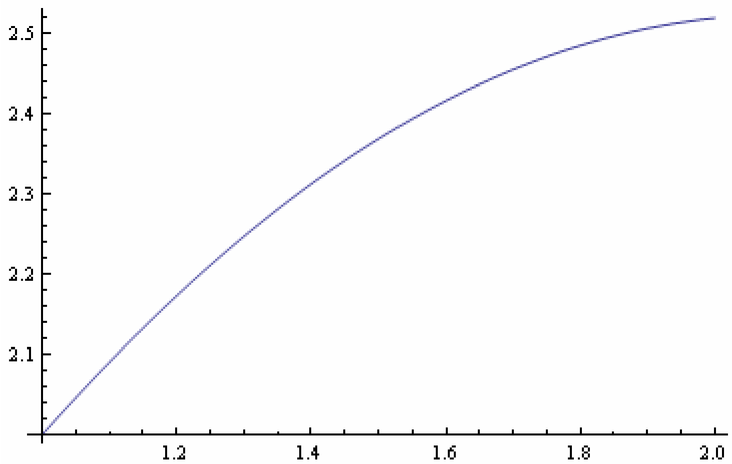
```
Sol1 = NDSolve[{y'[t] == 0.2 * y[t] + Cos[1 / ((t - 1)^2 + 1)], y[0] == 1}, y, {t, 0, 1}]

{{y → InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]}}

YN1 = First[y /. Sol1]

InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]
```

```
Plot[YN1[t], {t, 0, 1}]
```



Шаг 2. Найти численное решение $y = \varphi_2(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения $y'(x) = 0.2y(t) + \cos(\varphi_1(t-1))$ на отрезке $[1, 2]$ с начальным условием $y(1) = \varphi_1(1)$.

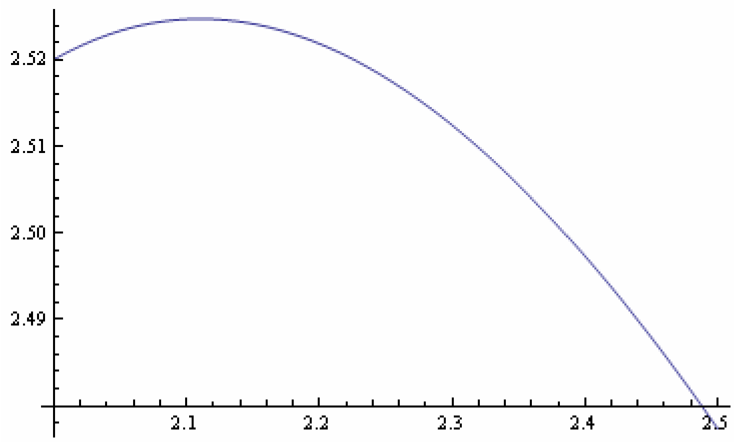
```
Sol2 = NDSolve[{y'[t] == 0.2 * y[t] + Cos[YN1[t - 1]], y[1] == YN1[1]}, y, {t, 1, 2}]
{{y → InterpolatingFunction[{{1., 2.}}, <>]}}
YN2 = First[y /. Sol2]
InterpolatingFunction[{{1., 2.}}, <>]
Plot[YN2[t], {t, 1, 2}]
```



Шаг 3. Найти численное решение $y = \varphi_3(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения $y'(x) = 0.2y(t) + \cos(\varphi_2(t-1))$ на отрезке $[2, 2.5]$ с начальным условием $y(2) = \varphi_2(2)$.

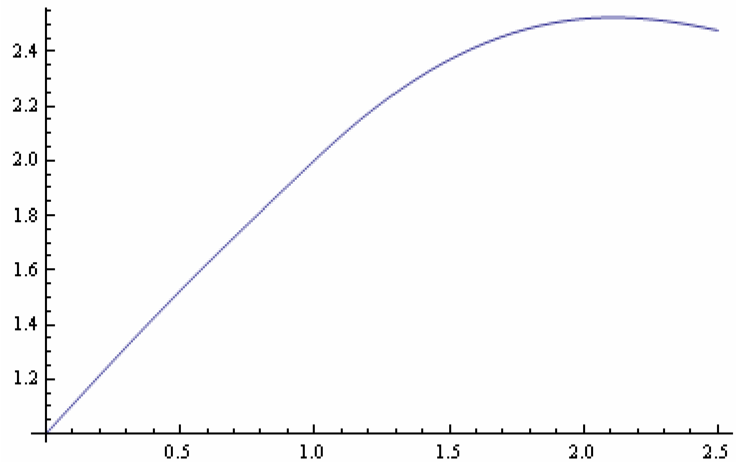
```
Sol3 = NDSolve[{y'[t] == 0.2 * y[t] + Cos[YN2[t - 1]], y[2] == YN2[2]}, y, {t, 2, 2.5}]
{{y → InterpolatingFunction[{{2., 2.5}}, <>]}}
YN3 = First[y /. Sol3]
InterpolatingFunction[{{2., 2.5}}, <>]
```

```
Plot[YN3[t], {t, 2, 2.5}]
```



2) Сформировать решение $y(t)$ дифференциального уравнения на заданном отрезке $[a,b]$ и построить график функции.

```
Y[t_] := Block[{z},
  If[t ≥ 0 && t < 1, z = YN1[t],
   If[t ≥ 1 && t < 2, z = YN2[t],
    If[t ≥ 2 && t <= 2.5, z = YN3[t], z = 0]]];
  z]
Plot[Y[t], {t, 0, 2.5}]
```



Варианты:

№ вар	***задача с запаздывающим аргументом***
1	$y'(t) = y(t) + e^{\cos(y(t-1))} - \ln(1+t^2)$ на отрезке $[-1, 3.6]$, где $y(t) = \sqrt{t+3}, t \in [-2,-1]$
2	$y'(t) = 2.1\cos(y(t) + \sin^2(t)) - y(t-3) + \dfrac{\ln(t^2+1)}{4.2}$ на отрезке $[-2, 11.5]$, где $y(t) = \dfrac{t^2+1}{2},\ t \in [-5,-2]$

№ вар	задача с запаздывающим аргументом
3	$y'(t) = 5.2\cos(y(t)+2) - y^2(t-2) + \dfrac{\ln(t^2+1)}{4.7}$ на отрезке $[-1, 8.5]$, где $y(t) = t^2 - \sin(t+1),\ t \in [-3, -1]$
4	$y'(t) = \ln(\cos^2(y(t)) + 2.4) - 3.1\sin(4 - y(t-2)) + \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{4.7}$ на отрезке $[1, 10.5]$, где $y(t) = 1 + \sin(t-1),\ t \in [-1, 1]$
5	$y'(t) = 3\sin^2(2.7 - y(t)) + 4\cos(y(t-1)+2) - \dfrac{t}{e^{t+1}+2}$ на отрезке $[-1, 3.4]$, где $y(t) = \cos(t+1),\ t \in [-2, -1]$
6	$y'(t) = \dfrac{y(t-1)\cdot\sin(y(t))}{\sqrt{y^2(t)+3.1}} + t\left(\sin^2(t) + \cos\left(\dfrac{t^2+1}{7.8}\right)\right)$ на отрезке $[-2, 2.9]$, где $y(t) = t^2 - 1,\ t \in [-3, -2]$
7	$y'(t) = 1.3y^2(t) - \sin(y(t-2)) + \dfrac{t-4.7}{e^{t-1}+1.2}$ на отрезке $[3, 11.9]$, где $y(t) = \sqrt{t+3},\ t \in [1, 3]$
8	$y'(t) = 2\sin(4.1 - y(t)) - 3\cos(y(t-1)+2) + 0.15\sqrt[4]{1.3+t^2}$ на отрезке $[1, 5.8]$, где $y(t) = \sin(t),\ t \in [0, 1]$
9	$y'(t) = y(t-3)\sqrt{2 + \sin(y(t)) + \cos(y(t))} + \ln(1+t)$ на отрезке $[-2, 11]$, где $y(t) = \sqrt{\sin(t) + 1.01},\ t \in [-5, -2]$
10	$y'(x) = \sin(1 + \ln(y^2(t)+1)) - \cos(y(t-2)) + \dfrac{1.3}{e^t+3}$ на отрезке $[0, 8.7]$, где $y(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ t \in [-2, 0]$
11	$y'(t) = -0.1y(t) + \sqrt{1 + y^2(t-2)} + \dfrac{5\cos(t)}{2\sin(t)+3}$ на отрезке $[2, 10.5]$, где $y(t) = e^{-t},\ t \in [0, 2]$
12	$y'(x) = \sin(y(t)) + \cos(y(t-2)) + \dfrac{1}{t+3}$ на отрезке $[0, 9]$, где $y(t) = \sqrt{t^2+1},\ t \in [-2, 0]$
13	$y'(t) = \ln(2 + 0.1y^2(t)) + \dfrac{3}{y^4(t-1)} + 7\cos(t)$ на отрезке $[-2, 2.7]$, где $y(t) = t,\ t \in [-3, -2]$

№ вар	задача с запаздывающим аргументом
14	$y'(t)=2.4\cos(y(t)-1)+\sqrt{1.4+y^2(t-3)}-\dfrac{\sin(t-2)}{\cos(t+1)+3.1}$ на отрезке $[-1,12.7]$, где $y(t)=e^{-\frac{t}{2}}$, $t\in[-4,-1]$
15	$y'(t)=3\sin(y(t)+\cos(t))+y(t-2)+\dfrac{1}{t^2+2}$ на отрезке $[0,8.5]$, где $y(t)=\dfrac{t^2}{2}$, $t\in[-2,0]$
16	$y'(t)=\cos^2(y(t)+1)-e^{y(t-1)+1}+\dfrac{t}{4.5t^2+3}$ на отрезке $[-3,1.6]$, где $y(t)=\sin(t-1)$, $t\in[-4,-3]$
17	$y'(t)=\ln(y^2(t)+1)-\cos(y(t-2)+3.4)+\dfrac{\sin(t)}{t^2+1}$ на отрезке $[2,11.3]$, где $y(t)=2t+\sin(t)$, $t\in[0,2]$
18	$y'(t)=\dfrac{y(t)}{y^2(t)+0.1}\sin(y(t))+y(t-2)+\cos(t-1)$ на отрезке $[-3,6]$, где $y(t)=0, t\in[-5,-3]$
19	$y'(t)=4.5\cos^2(t+y(t))-\sin(y(t-1)+1)+\dfrac{\ln(t^2+1)+3}{2.8}$ на отрезке $[0,4.6]$, где $y(t)=t^2-1$, $t\in[-1,0]$
20	$y'(t)=-6\sin(y(t)-3)+y^2(t-3)-\dfrac{t^2}{t+5}$ на отрезке $[3,16.5]$, где $y(t)=\sqrt{t}, t\in[0,3]$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ТЕМА. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Цель занятия: изучить метод конечных разностей для решения краевой задачи с граничными условиями первого рода, используя для решений системы разностных уравнений метод прогонки.

Задание:

В соответствие с вариантом найти численное решение дифференциального уравнения

$$y''(t) - p(t)y(t) = f(t) \text{ на отрезке } [a,b]$$

$$\text{с закрепленными концами } y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta.$$

Порядок выполнения работы.

Найти численное решение дифференциального уравнения

$$y''(t) - (t^2 + 1.7)y(t) = 2\sin(t - 1.5) + 0.4 \text{ на отрезке } [0,\ \pi]$$

$$\text{с закрепленными концами } y(0) = -1,\ y(\pi) = 4.$$

Краткие теоретические сведения.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$y''(t) - p(t)\cdot y(t) = f(t),\ t \in [a,b];\quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \tag{1}$$

Здесь $a,\ b\ (a < b),\ \alpha,\ \beta$ – заданные числа, $p(t)$, $f(t)$ – заданные функции, причем $p(t) < 0$, $t \in [a,\ b]$.

Используя конечноразностное соотношение

$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

перейдем от непрерывной задачи (1) к дискретной задаче, построенной на сетке узлов

$$x_i = a + i\cdot h,\ i = \overline{0,\ n},\ \text{где } h = \frac{b-a}{n}.$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha; \\ y_{i+1} - (2 + h^2 p_i)y_i + y_{i-1} = h^2 f_i, \quad i = \overline{1,\ n-1}; \\ y_n = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

где $y_i \approx y(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Систему (2) можно записать в матричном виде

$$A\,y = b, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(2+h^2p_1) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(2+h^2p_2) & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -(2+h^2p_{n-1}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \dots \\ h^2 f_{n-1} \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица A – трехдиагональная матрица, то для решения системы (3) наиболее эффективным является метод прогонки. Данный метод позволяет найти решение системы (3) по формулам:

$$\begin{aligned} & y_n = \beta, \\ & y_i = E_{i+1}\cdot y_{i+1} + D_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \end{aligned}, \tag{4}$$

где

$$E_1 = 0, \qquad D_1 = \alpha;$$

$$E_{i+1} = \frac{1}{2 + h^2 p_i - E_i}, \quad D_{i+1} = \frac{D_i - h^2 f_i}{2 + h^2 p_i - E_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \qquad (5)$$

Реализация метода предусматривает выполнение двух этапов:

1 этап прямой ход метода прогонки: вычисление коэффициентов E_i, D_i, $i = \overline{1, n}$ по формулам (5);

2 этап обратный ход метода прогонки: построение решения системы (3) по формулам (4).

Реализация решения задачи в СКМ *Mathematica*.

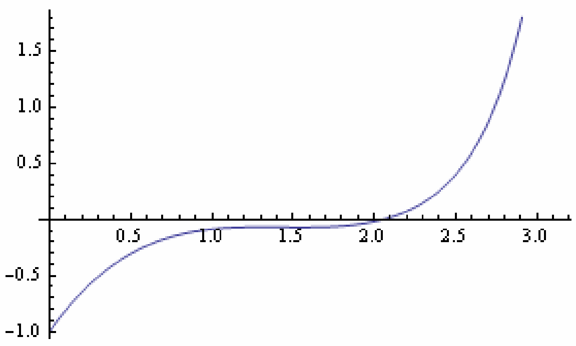
26. Загрузить СКМ Mathematica:

Сетевые приложения → Математика → Mathematica

27. Сохранить файл с именем DUkr.nb.
28. Решить краевую задачу и построить график её решения с помощью функции NDSolve[].

```
p[t_] = t^2 + 1.7
1.7 + t^2
f[t_] = 2*Sin[t - 1.5] + 0.4
0.4 - 2 Sin[1.5 - t]
Sol = NDSolve[{y''[t] - p[t]*y[t] == f[t],
   {y[0] == -1, y[Pi] == 4}}, y, {t, 0, Pi}]
{{y → InterpolatingFunction[{{0., 3.14159}},
YN = First[y /. Sol]
```

```
Plot[YN[t], {t, 0, Pi}]
```



29. Сформировать численное решение дифференциального уравнения в СКМ *Mathematica* с помощью *метода конечных разностей*:
   1) Разработать функцию Progonka[], реализующую прямой и обратный ход метода прогонки:

```
Progonka[a_, b_, n_, ya_, yb_] := Block[
  {h, Ei, Di, Ei1, Di1, i, T, xi, yi, XY, YP},
  h = (b - a) / n;
```

входные переменные:
a, b - начало и конец отрезка интегрирования
n - количество разбиений отрезка
ya, yb - граничные значения в точках a и b соответственно

```
  Ei = 0; Di = ya;
  T = {{Ei, Di}};
  For[i = 2, i ≤ n, i++,
   xi = a + (i - 1) * h;
   Ei1 = 1 / (2 + h^2 * p[xi] - Ei);
   Di1 = (Di - h^2 * f[xi]) / (2 + h^2 * p[xi] - Ei);
   Ei = Ei1; Di = Di1;
   T = Append[T, {Ei, Di}]];
```

- прямой ход метода прогонки (расчет и формирование списка коэффициентов Ei и Di)

```
  yi = yb;
  XY = {{b, yb}};
```

- обратный ход метода прогонки (формирование списка координт решения yi)

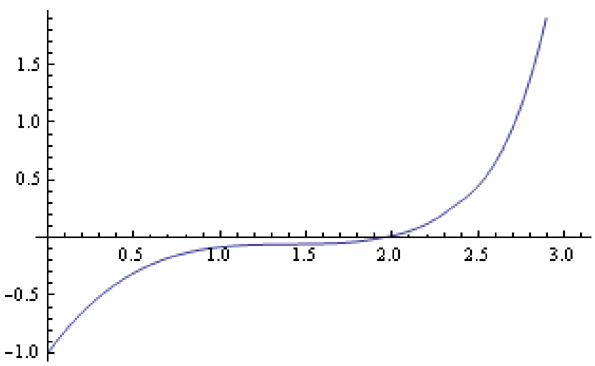
```
For[i = n - 1, i ≥ 0, i--,
 yi = T[[i + 1, 1]] * yi + T[[i + 1, 2]];
 xi = a + i * h;
 XY = Prepend[XY, {xi, yi}]];

YP = Interpolation[XY];
{T, XY, YP}]
```

- интерполяция решения по данным {X, Y}

2) Найти решение задачи с помощью процедуры PROGONKA[] для *n = 8, 16, 32, 64, 128.*

```
T8 = Progonka[0.0, Pi, 8, -1, 4][[1]]

{{0, -1}, {0.437456, -0.343753},
 {0.520879, -0.105906},
 {0.511426, -0.0358071},
 {0.469211, -0.0559812},
 {0.41885, -0.10704}, {0.370446, -0.148806},
 {0.327117, -0.164564}}

XY8 = Progonka[0.0, Pi, 8, -1, 4][[2]]

{{0., -1}, {0.392699, -0.404321},
 {0.785398, -0.138455},
 {1.1781, -0.0624882}, {1.5708, -0.0521699},
 {1.9635, 0.0081226}, {2.35619, 0.274949},
 {2.74889, 1.1439}, {π, 4}}
```

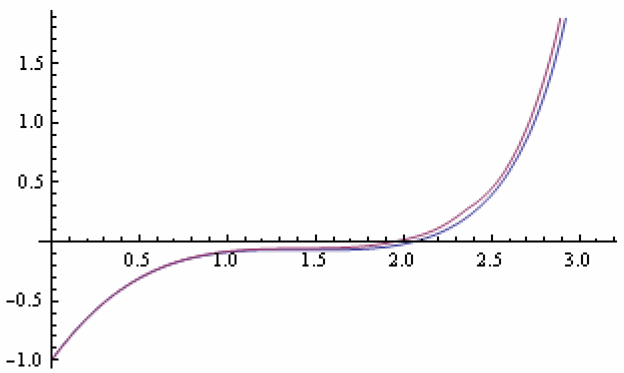
```
YP8 = Progonka[0.0, Pi, 8, -1, 4][[3]];

Plot[YP8[x], {x, 0.0, Pi}]
```



3) Построить графики всех найденных решений на одном координатном поле.

30. Последовательно сравнить графики, полученные с помощью процедуры PROGONKA[] с графиком решения, найденного по NDSOLVE[].

```
Plot[{YN[t], YP8[t]}, {t, 0, Pi}]
```



Реализация решения задачи в *Excel.*

31. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).

32. Сохранить файл (рабочую книгу) с именем DUkr.xls.

33. Добавить листы в рабочую книгу и переименовать их (СЛУ_n_8, МПр_n_8, СЛУ_n_16, МПр_n_16), на каждом из которых выполняется соответствующий пункт задания:

    Для *n = 8, 16* решить систему (3)

а) методом обратной матрицы

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	*a*=	0		*ya*=	-1															
2	*b*=	3,141593		*yb*=	4															
3	*n*=	8																		
4	*h*=	0,392699																		
5																				
6	**ti**	**p (ti)**	**f(ti)**		**i**	**A=**											**b=**		**y=**	
7	0	1,7	-1,59499		0		1	0	0	0	0	0	0	0	0			-1		-1
8	0,392699	1,854213	-1,38899		1		1	-2,3	1	0	0	0	0	0	0			-0,21		-0,404321
9	0,785398	2,31685	-0,910633		2		0	1	-2,4	1	0	0	0	0	0			-0,14		-0,138455
10	1,178097	3,087913	-0,232744		3		0	0	1	-2,5	1	0	0	0	0			-0,04		-0,062488
11	1,570796	4,167401	0,541474		4		0	0	0	1	-2,6	1	0	0	0			0,08		-0,05217
12	1,963495	5,555314	1,294155		5		0	0	0	0	1	-2,9	1	0	0			0,2		0,008123
13	2,356194	7,251652	1,910708		6		0	0	0	0	0	1	-3,1	1	0			0,29		0,274949
14	2,748894	9,256416	2,29727		7		0	0	0	0	0	0	1	-3,4	1			0,35		1,143904
15	3,141593	11,5696	2,39499		8		0	0	0	0	0	0	0	0	1			4		4

б) методом прогонки

	A	B	C	D	E	F	G
1	*a*=	0		*ya*=	-1		
2	*b*=	3,141593		*yb*=	4		
3	*n*=	8					
4	*h*=	0,392699					
5							
6	**i**	**ti**	**p(ti)**	**f(ti)**	**Ei**	**Di**	**yi**
7	0	0	1,7	-1,59499			-1
8	1	0,392699	1,854213	-1,38899	0	-1	-0,404321
9	2	0,785398	2,31685	-0,910633	0,437456	-0,343753	-0,138455
10	3	1,178097	3,087913	-0,232744	0,520879	-0,105906	-0,062488
11	4	1,570796	4,167401	0,541474	0,511426	-0,035807	-0,05217
12	5	1,963495	5,555314	1,294155	0,469211	-0,055981	0,008123
13	6	2,356194	7,251652	1,910708	0,41885	-0,10704	0,274949
14	7	2,748894	9,256416	2,29727	0,370446	-0,148806	1,143904
15	8	3,141593	11,5696	2,39499	0,327117	-0,164564	4

34. Сравнить графически решения (на отдельном листе Графики), полученные различными методами при разных значениях *n*.

Варианты:

№ вар	*p(t)*	*f(t)*	[*a*, *b*]	α	β
1	$4.7\cos(t-2)+\sqrt{t^2-2t+2}$	$\dfrac{5t+\sin(3t-1)}{t^2+1.8}$	[1; 8]	4	-3
2	$\cos(3t)\cdot e^{2-\sin(3t-1)}$	$\sqrt{t^2+1}+5\cos(3t-1)$	[0; 4]	1	3
3	$5.7\sqrt{1.1+\ln(2+\cos(t))}$	$t^2+7t\sin(2-4t)$	[-1; 5]	-2	2
4	$7.7+\sin(1-3.4t)$	$t^2-\sqrt{t^2+2}-4.2$	[-1; 4]	-2	2
5	$3.5\cdot e^{1-t}\cdot(t^2+1)$	$2.7\cdot\sin(t-1)+\sqrt{t^2+2t+3}$	[1; 6]	-2	3
6	$4\sqrt{5}-\cos^2(3t+2.4)$	$\dfrac{4t\cdot\sin(t+1)}{1+e^{1-3t}}$	[1; 5]	4	-3
7	$\dfrac{5\sqrt{2.1+\cos(t)}+\sin(t)}{t^2-2t+1.05}$	t^2+t-e^{-t}	[-1; 4]	1	1

№ вар	p(t)	f(t)	[a, b]	α	β
8	$\ln(\sqrt{t^2+1.7})\cdot(\sin(2-t)+4.7)$	$\dfrac{t+\sqrt{4t^2+1}}{3.1+\cos(2t)}$	[-1; 5]	-1	-2
9	$2-\sin(3t)$	$-2t^2+7\mathrm{arctg}(t+1)$	[-1; 7]	0	3
10	$2\sqrt{1.1+\sqrt{1.1+\cos(t)}}$	$\dfrac{8t^2}{t^2+2t+3}\cdot\sin(t^2+1)$	[1; 5]	1	3
11	$6\sqrt{1.1+\sin(t)}$	$t^2+7\cos(4t+1)$	[1; 5]	1	-1
12	$e^{2\cdot\sin(3t-1)}$	$\dfrac{t^2-3t+1}{t^2+t+1}\cdot 6\sin(2t+1)$	[1; 10]	0.5	0
13	$e^{4-3t}+\sin^2(t+1)+1.1$	$\sqrt{5.4+3\cos^2(1-3t)}$	[1; 9]	1	-2
14	$16\cdot\sin^2(t)$	$\dfrac{t}{t^2+1}$	[0; 2π]	0	1
15	$\dfrac{t+1}{4+3.9\sin(t)}$	$\sqrt{2t^2+1}\cos(3t)$	[2; 7]	3	-1
16	$\ln(\sqrt{t^2+2}+3.7)$	$7.2+e^{1-3t}-\sqrt{4.8}\cdot t$	[0; 6]	-5	-2
17	$\sqrt{t^2-3t+5}\cdot(\cos^2(t)+1.6)$	$8.4\sin(t^2+1)-\ln(\cos(t)+3)$	[2; 5]	1	-1
18	$8.3\cdot\sin^2(t+3)-4.1$	$\dfrac{\cos(\sqrt{3}+t)}{2.4t^2+1}$	[0; 8]	1	1
19	$\dfrac{t^2}{5}+\sqrt{1+t^2}$	$3\sin(t^2)+14\cos(2t+1)$	[-1; 6]	2	3
20	$\cos(t^2-t+4.7)+3.2$	$\dfrac{\sqrt{t^2+1}-t^2}{t^2-2t+6}$	[-3; 5]	2	-1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ТЕМА. МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ).

Цель занятия: изучить метод сеток для численного решения уравнений с частными производными на примере уравнения теплопроводности.

Задание:

Используя метод сеток, в соответствие с вариантом найти решение однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \le x \le b, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

сопровождаемого начальным по временной переменной t условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad a \le x \le b$$

и краевыми условиями по пространственной переменной x

$$u(a,t) = \alpha(t) \quad \text{и} \quad u(b,t) = \beta(t) \quad \text{при} \quad t \ge 0.$$

Порядок выполнения работы.

Найти численное решение однородного уравнения теплопроводности

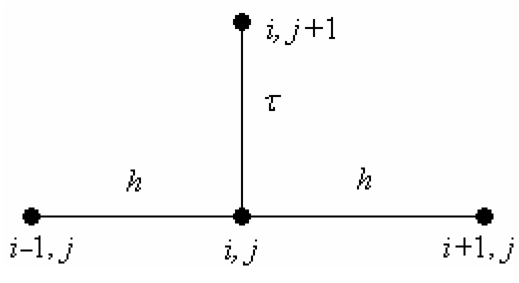
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 2, \quad t \ge 0,$$

с условиями $u(x,0) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $0 \le x \le 2$, и $u(0,t) = t(t+1)$, $u(2,t) = \sin(t)$, $t \ge 0$.

Краткие теоретические сведения.

Введем в области $G(x,t) = [a,b] \times [0,+\infty)$ прямоугольную сетку с узлами (x_i, y_j), где $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, $t_j = j\tau$, $j = 0,1,2,\ldots$; h – шаг по направлению x, τ – шаг по направлению t. Заменяя производные в (1) конечно-разностными приближенными соотношениями, от непрерывной задачи (1) переходят к конечно-разностной схеме, которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Для задачи теплопроводности возможны две различные схемы метода сеток.

1. Первая разностная схема основана на шаблоне



и имеет вид:

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i+1}^j + (1-2\lambda)u_i^j + \lambda u_{i-1}^j, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = 0,1,2,\ldots; \tag{2.1}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0,n}; \tag{2.2}$$

$$u_0^j = \alpha(t_j), \quad u_n^j = \beta(t_j), \quad j = 0,1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

Здесь $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$ – приближенное значение функции решения $u(x,t)$ в узле (i, j),

$\lambda = \mathrm{a}\dfrac{\tau}{h^2}$.

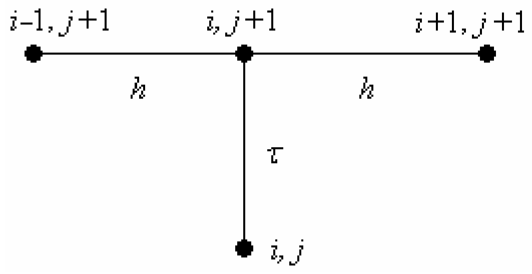
Разностная схема (2.1)-(2.3) – явная двухслойная схема:

- ✓ значения на нулевом слое u_i^0, $i = \overline{0,n}$, находятся в соответствии с формулами (2.2);

- ✓ для вычислений значений u_i^{j+1}, $i=\overline{1,n-1}$, на ($j+1$)-ом слое по формуле (2.1) необходимо знать значения u_i^j, $i=\overline{0,n}$, на предыдущем j-ом слое, что позволяет находить внутренние значения ($j+1$)-го слоя непосредственно по формуле (2.1).
- ✓ значения на краях ($j+1$)-го слоя – u_0^{j+1} и u_n^{j+1} – находятся по формуле (2.3).

Разностная схема (2.1)-(2.3) является условно устойчивой. Для обеспечения ее устойчивости должно выполняться условие $\lambda \le 0.5$.

2. В основе второй разностной схемы лежит шаблон:



Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$-\lambda u_{i-1}^{j+1}+(1+2\lambda)u_i^{j+1}-\lambda u_{i+1}^{j+1}=u_i^j,\quad i=\overline{1,n-1},\quad j=j=0,1,2,\ldots; \tag{3.1}$$

$$u_i^0=\varphi(x_i),\quad i=\overline{0,n}; \tag{3.2}$$

$$u_0^j=\alpha(t_j),\quad u_n^j=\beta(t_j),\quad j=0,1,2,\ldots \tag{3.3}$$

Принципиальное отличие схемы (3.1)-(3.3) от (2.1)-(2.3) в том, что она неявная. Хотя вычисления по-прежнему ведутся по слоям, на каждом новом слое необходимо решить систему уравнений

$$\begin{gathered}-\lambda u_{i-1}^{j+1}+(1+2\lambda)u_i^{j+1}-\lambda u_{i+1}^{j+1}=u_i^j,\quad i=\overline{1,n-1};\\ u_0^{j+1}=\alpha(t_{j+1}),\quad u_n^{j+1}=\beta(t_{j+1}).\end{gathered} \tag{4}$$

Запишем систему (4) в матричном виде

$$Ay=b, \tag{5}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\ldots&0&0&0\\-\lambda&1+2\lambda&-\lambda&0&\ldots&0&0&0\\0&-\lambda&1+2\lambda&-\lambda&\ldots&0&0&0\\\ldots&&&&&&&\\0&0&0&0&\ldots&-\lambda&1+2\lambda&-\lambda\\0&0&0&0&\ldots&0&0&1\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}u_0^{j+1}\\u_1^{j+1}\\u_2^{j+1}\\\ldots\\u_{n-1}^{j+1}\\u_n^{j+1}\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}\alpha(t_{j+1})\\u_1^j\\u_2^j\\\ldots\\u_{n-1}^j\\\beta(t_{j+1})\end{pmatrix}.$$

Для решения системы (5) используют известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (в т.ч. метод прогонки, поскольку матрица A имеет трехдиагональную структуру).

Разностная схема (3.1)-(3.3) абсолютно устойчива, т.е. она устойчива при любом соотношении шагов h и τ.

Реализация решения задачи в СКМ *Mathematica* и в ЭТ *Excel*.

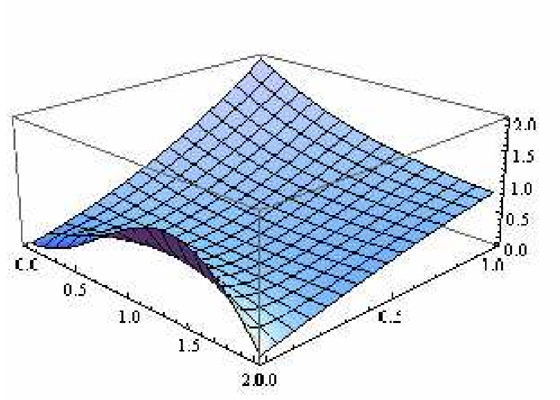
35. Загрузить СКМ *Mathematica*:

    Сетевые приложения → Математика → Mathematica

36. Сохранить файл с именем DU_ch_p.nb.
37. Решить задачу в частных производных в области $G(x,t)=[a,b]\times[0,1]$ и построить трехмерный график её решения с помощью функции NDSolve[].

```
Sol =
 NDSolve[{∂t u[x, t] == 3 ∂x,x u[x, t],
   u[x, 0] == x * Sin[Pi * x / 2], u[0, t] == t * (t + 1),
   u[2, t] == Sin[t]}, u, {x, 0, 2}, {t, 0, 1}]

{{u → InterpolatingFunction[{{0., 2.}, {0., 1.}}, <>]}}

FU = First[u /. Sol]

InterpolatingFunction[{{0., 2.}, {0., 1.}}, <>]
```

```
Plot3D[FU[x, t], {x, 0, 2}, {t, 0, 1}]
```



38. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).
39. Сохранить файл (рабочую книгу) с именем DU_ch_p.xls.
40. Добавить листы в рабочую книгу и переименовать их (MC_1, MC_2), на каждом из которых выполняется соответствующий пункт задания:
41. Реализовать явную схему метода сеток (2.1)-(2.3) при $n = 5$.

1) Исходя из условия устойчивости, подобрать шаг τ, если $h = \dfrac{b-a}{n}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*a* =	0		a^2 =	3			
2	*b* =	2		подбор =	0,026667			
3	*n* =	5		τ =	0,025	--> *m* =	40	
4	*h* =	0,4		λ =	0,46875	<=0,5 -->	ИСТИНА	

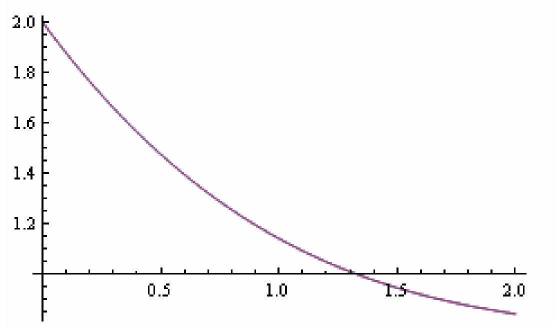
2) На рабочем листе MC_1 по формулам (2.1)-(2.3) сформировать решение в области $G(x,t) = [a,b] \times [0,1]$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
6		x	x0	x1	x2	x3	x4	x5
7	t		0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
8	t0	0	0	0,235114	0,760845	1,141268	0,940456	2,45E-16
9	t1	0,025	0,025625	0,371341	0,692732	0,868814	0,593748	0,0249974
10	t2	0,05	0,0525	0,359939	0,624618	0,657338	0,456084	0,0499792
...								
46	t38	0,95	1,8525	1,443576	1,160225	0,976236	0,8681	0,8134155
47	t39	0,975	1,925625	1,502438	1,206801	1,011792	0,893156	0,8277019
48	t40	1	2	1,562227	1,253971	1,047592	0,918085	0,841471

3) Решение, полученное на последнем слое (при $t = 1$), перенести в систему СКМ *Mathematica* и сравнить графически с решением, полученным с помощью функции NDSolve[].

```
ZUn5 = {{0, 2}, {0.4, 1.562227}, {0.8, 1.253971},
  {1.2, 1.047592}, {1.6, 0.918085}, {2, 0.841471}}

{{0, 2}, {0.4, 1.56223}, {0.8, 1.25397},
 {1.2, 1.04759}, {1.6, 0.918085}, {2, 0.841471}}

IntUn5 = Interpolation[ZUn5]

InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]
```

```
Plot[{FU[x, 1], IntUn5[x]}, {x, 0, 2}]
```



42. Повторить п. 7 для $n = 10$.

43. Реализовать неявную схему метода сеток (3.1)-(3.3) при n = 5 и заданном значении m.

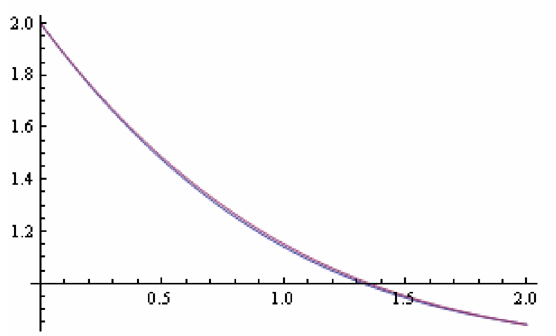
1) На рабочем листе `MC_2` по формулам (3.1)-(3.3) сформировать решение в области $G(x,t)=[a,b]\times[0,1]$, если $h=\dfrac{b-a}{n}$ и $\tau=\dfrac{1}{m}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a =	0		a^2 =	3			
2	b =	2		m =	10			
3	n =	5		τ =	0,1			
4	h =	0,4		λ =	1,875			
5								
6	A=							
7		1	0	0	0	0	0	
8		-1,875	4,75	-1,875	0	0	0	
9		0	-1,875	4,75	-1,875	0	0	
10		0	0	-1,875	4,75	-1,875	0	
11		0	0	0	-1,875	4,75	-1,875	
12		0	0	0	0	0	1	
13								
14		x	x0	x1	x2	x3	x4	x5
15	t		0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
16	t0	0	0	0,235114	0,760845	1,141268	0,940456	2,45E-16
17	t1	0,1	0,11	0,304183	0,535203	0,645881	0,492352	0,099833
18	t2	0,2	0,24	0,321874	0,413182	0,439413	0,355528	0,198669
...								
25	t9	0,9	1,71	1,339875	1,084531	0,919741	0,825263	0,783327
26	t10	1	2	1,571386	1,266245	1,058018	0,923538	0,841471
27								
28				Вспомогательные данные (правая часть СЛАУ)				
29		x	x0	x1	x2	x3	x4	x5
30	t		0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
31	t0	0						
32	t1	0,1	0,11	0,235114	0,760845	1,141268	0,940456	0,099833
33	t2	0,2	0,24	0,304183	0,535203	0,645881	0,492352	0,198669
...								
40	t9	0,9	1,71	1,124659	0,914743	0,787907	0,726747	0,783327
41	t10	1	2	1,339875	1,084531	0,919741	0,825263	0,841471

2) Решение, полученное на последнем слое (при t = 1), перенести в систему СКМ *Mathematica* и сравнить графически с решением, полученным с помощью функции NDSolve[].

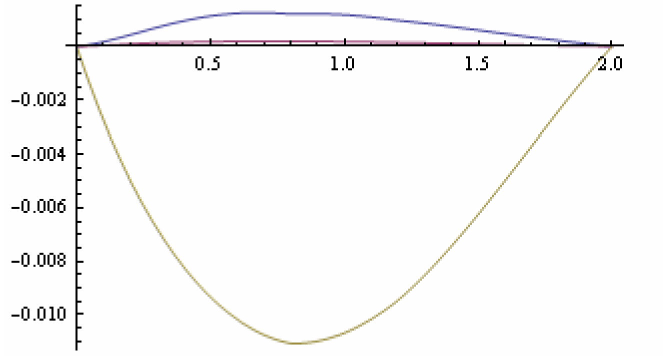
```
ZU = {{0, 2}, {0.4, 1.571386}, {0.8, 1.266245},
  {1.2, 1.058018}, {1.6, 0.923538}, {2, 0.841471}}

{{0, 2}, {0.4, 1.57139}, {0.8, 1.26625},
 {1.2, 1.05802}, {1.6, 0.923538}, {2, 0.841471}}

IntU = Interpolation[ZU]

InterpolatingFunction[{{0., 2.}}, <>]
```

```
Plot[{FU[x, 1], IntU[x]}, {x, 0, 2}]
```



44. На одном координатном поле построить графики отклонений трех решений, найденных по методу сеток, от решения, полученного с помощью функции NDSolve[] при t = 1.

```
Plot[{FU[x, 1] - IntUn5[x], FU[x, 1] - IntUn10[x],
  FU[x, 1] - IntU[x]}, {x, 0, 2}]
```



Варианты:

№ вар	a²	[*a*, *b*]	φ(*x*)	α(*t*)	β(*t*)	*m*
1	3	[0; 4]	$(x+1)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot x\right)$	$t+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$	$t+5$	14
2	2	[0; 0,75]	$x^2\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right)$	t^3-t^2+2t	$t\cdot\cos(t)$	11
3	1	[0; 3]	$2-e^{-x}$	1	$2-e^{-3}+t\cdot\sin(t)$	12
4	1,5	[0; 1,5]	$x+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot x\right)$	e^{-2t}	$\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$	12
5	1,75	[0; 2]	$\frac{2-x}{5}\cdot x$	$t\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$	t	14
6	1,5	[0; 3]	$\frac{x+1}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot x\right)$	$\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$	$2e^{-2t}$	11
7	2	[0; 2]	$2-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}\cdot x\right)$	t^2+2	$\cos(t)$	11
8	3	[0; 2]	1	$2-\cos(t)$	$1+\frac{t}{3}$	10
9	0,5	[0; 2,5]	$1+x$	$1+t\cdot\ln(t+1)$	$3{,}5\cdot\cos(t)$	10
10	2,3	[0; 0,75]	0	t	$3\cdot\sin(t)$	11
11	2,75	[0; 1]	$\frac{x+3}{2}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$	$\frac{t^2}{2}+t$	$2\cdot\cos(t)$	11

№ вар	a^2	[a, b]	$\varphi(x)$	$\alpha(t)$	$\beta(t)$	m
12	2,5	[0; 1,5]	$4+e^{-2x}$	t^2-t+5	$4+e^{-3(t+1)}$	12
13	2,25	[0; 3]	$\frac{x}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right)$	$\frac{t\cdot(t-1)}{3}$	$\frac{5}{2}\cdot(t^2+1)$	11
14	0,75	[0; 1]	$1+\sin(\pi\cdot x)$	t^2+t+1	$1-\frac{t}{5}$	12
15	3,1	[0; 2,4]	x	0	$1{,}4+\cos(t)$	10
16	2,25	[0; 3]	$1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot x\right)$	$2+\mathrm{arctg}(t)$	t^2	14
17	1	[0; 1,5]	$x\cdot(2-x)$	$t+\sin(t)$	$1{,}75-\cos(t)$	12
18	2,5	[0; 2]	$\frac{3}{2}x^2+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot x\right)$	$t^2\cdot\ln(t+1)$	$5\cdot e^{-t}$	10
19	1,5	[0; 1,25]	$x\cdot(1{,}25-x)\cdot\cos(x)$	$\frac{t^3}{4}+t$	0	14
20	1,7	[0; 2]	$\frac{x^2+1}{5}\cdot x$	$t+\sin(t)$	$t+2$	12

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ТЕМА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП).

I часть. *Графический метод решения ЗЛП с двумя переменными.*

Цель занятия: изучение графического метода решения ЗЛП с двумя переменными, выработать умение использовать возможности систем *Excel* и *Mathematica* для решения ЗЛП.

Задание:

В соответствии с вариантом решить ЗЛП с двумя переменными

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \text{extr},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2\{\le,\ge,=\}b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\{\le,\ge,=\}b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2\{\le,\ge,=\}b_3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

- графическим методом (на максимум и на минимум);
- используя инструмент *Поиск решения* в ЭТ *Excel* (на максимум);
- используя функции *Maximize (Minimize)* и *LinearProgramming* системы *Matematica* (на максимум и на минимум).

Порядок выполнения работы.

Решить ЗЛП с двумя переменными:

$$Z(x) = 2x_1 + x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 10; \\ 2x_1 - x_2 \le 9; \\ x_1 - 3x_2 \ge -4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

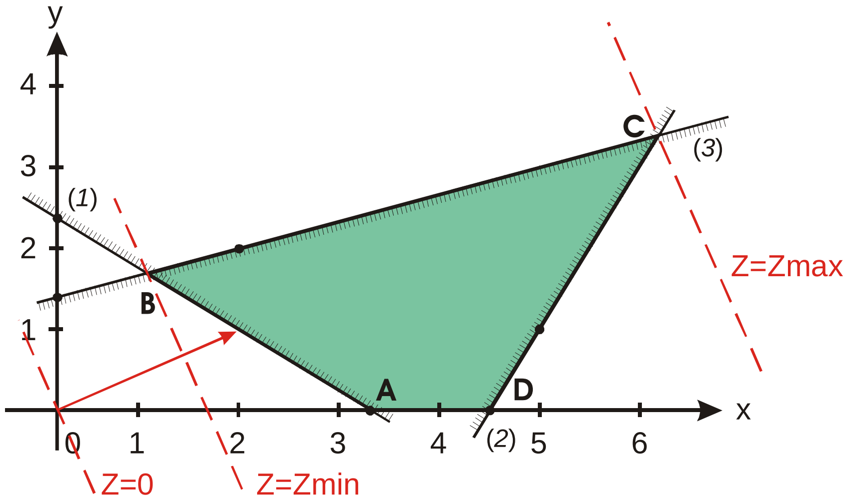
Реализация решения задачи (выполняется письменно).

1. Построение области допустимых решений (ОДР).

(1) *прямая*	(2) *прямая*	(3) *прямая*
$3x_1 + 4x_2 = 10$	$2x_1 - x_2 = 9$	$x_1 - 3x_2 = -4$
$x_1 = 0 \Rightarrow 3\cdot 0 + 4x_2 = 10$	$x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 0 = 9$	$x_1 = 0 \Rightarrow 0 - 3x_2 = -4$
$4x_2 = 10$	$2x_1 = 9$	$-3x_2 = -4$
$x_2 = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$	$x_1 = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$	$x_2 = \dfrac{-4}{-3} \approx 1{,}3$
$x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 4\cdot 0 = 10$	$x_2 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 1 = 9$	$x_1 = 2 \Rightarrow 2 - 3x_2 = -4$
$3x_1 = 10$	$2x_1 = 10$	$-3x_2 = -6$
$x_1 = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$	$x_1 = \dfrac{10}{2} = 5$	$x_2 = \dfrac{-6}{-3} = 2$
точки: $(0;2{,}5)$ и $(3{,}3;0)$	точки: $(4{,}5;0)$ и $(5;1)$	точки: $(0;1{,}3)$ и $(2;2)$

В силу условия $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ рассматриваем только I координатный угол.

ОДР есть четырехугольник ABCD.



2. Определим вектор наискорейшего возрастания целевой функции:

$$grad\ Z(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и построим линию уровня при $Z = 0$

$$2x_1 + x_2 = 0,$$

перпендикулярно вектору градиента.

3. Определение крайнего положения линии уровня $Z = Z_0$ при решении задачи на максимум.

Перемещая линию уровня в направлении вектора градиента, определяем крайнюю точку ОДР – точка C. Найдем её координаты:

$$\begin{cases} (2)\ прямая \\ (3)\ прямая \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 9; \\ x_1 - 3x_2 = -4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{31}{5} = 6\dfrac{1}{5} = 6{,}2; \\ x_2 = \dfrac{17}{5} = 3\dfrac{2}{5} = 3{,}4. \end{cases}$$

Вычислим значение целевой функции в точке C:

$$Z_{max} = Z(C) = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 6{,}2 + 3{,}4 = 15{,}8$$

4. При решении задачи на минимум, перемещая линию уровня в направлении антиградиента, определяем крайнюю точку ОДР – точка B. Найдем её координаты и вычислим значение целевой функции в точке B:

$$B: x_1 = \frac{14}{13} \approx 1{,}08; \quad x_2 = \frac{22}{13} \approx 1{,}69;$$

$$Z_{min} = Z(B) = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{14}{13} + \frac{22}{13} = \frac{50}{13} \approx 3{,}85$$

Реализация решения задачи в ЭТ *Excel*.

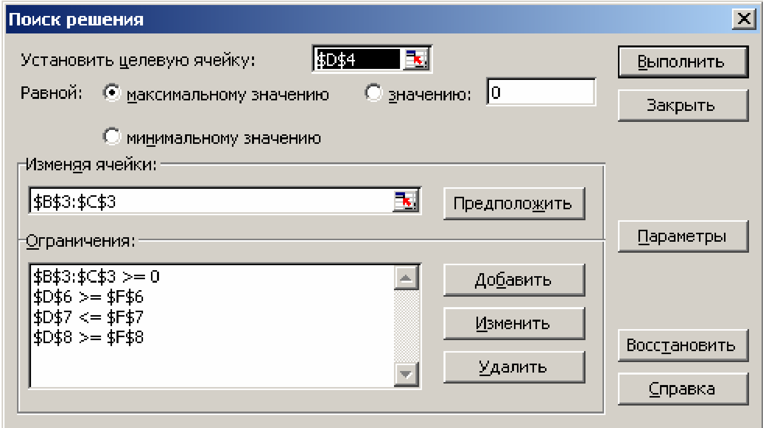
45. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).
46. Сохранить файл (рабочую книгу) с именем ZLP.xls.
47. Переименовать лист в рабочей книге в ЗЛП_1.
48. **Выполнить решение задачи.**

1 шаг: сформировать таблицу, ввести значения и формулы

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**					
2	наименование	***x***	***y***			
3	**план (значение)**			**ЦФ**	направление	
4	коэффициенты	2	1	0	max	
5	**Ограничения**			**левая часть**	**знак**	**правая часть**
6	коэф. огр 1	3	4	0	>=	10
7	коэф. огр 2	2	-1	0	<=	9
8	коэф. огр 3	1	-3	0	>=	-4

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**					
2	наименование	*x*	*y*			
3	**план (значение)**			**ЦФ**	направление	
4	коэффициенты	2	1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B4:C4)	max	
5	**Ограничения**			**левая часть**	**знак**	**правая часть**
6	коэф. огр 1	3	4	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B6:C6)	>=	10
7	коэф. огр 2	2	-1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B7:C7)	<=	9
8	коэф. огр 3	1	-3	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B8:C8)	>=	-4

2 шаг: задать данные в полях надстройки «*Поиск решения*»



3 шаг: сформировать *отчет по результатам*

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Задача ЛП
Отчет создан: 20.03.2008 19:17:21

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	коэффициенты ЦФ	0	15,8

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	план (значение) x	0	6,2
$C$3	план (значение) y	0	3,4

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$6	коэф. огр 1 левая часть	32,2	$D$6>=$F$6	не связан.	22,2
$D$7	коэф. огр 2 левая часть	9	$D$7<=$F$7	связанное	0
$D$8	коэф. огр 3 левая часть	-4	$D$8>=$F$8	связанное	0
$B$3	план (значение) x	6,2	$B$3>=0	не связан.	6,2
$C$3	план (значение) y	3,4	$C$3>=0	не связан.	3,4

Реализация решения задачи в СКМ *Mathematica*.

49. Загрузить СКМ *Mathematica*:

Сетевые приложения → Математика → Mathematica

50. Сохранить файл с именем ZLP1.nb.
51. Выполнить решение задачи.

- на минимум (с помощью функции *Minimize* и *LinearProgramming*)

```
Minimize[{2 x1 + x2, 3 * x1 + 4 * x2 ≥ 10, 2 x1 - x2 ≤ 9, x1 - 3 x2 ≥ -4, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0},
 {x1, x2}]
```

$$\left\{\frac{50}{13}, \left\{x1 \to \frac{14}{13}, x2 \to \frac{22}{13}\right\}\right\}$$

```
Z[x1_, x2_] = 2 * x1 + x2;

PlMin = LinearProgramming[{2, 1}, {{3, 4}, {2, -1}, {1, -3}},
  {{10, 1}, {9, -1}, {-4, 1}}]
```

$\left\{\frac{14}{13}, \frac{22}{13}\right\}$

```
Z[PlMin[[1]], PlMin[[2]]]
```

$\frac{50}{13}$

- на максимум (с помощью функции *Maximize* и *LinearProgramming*)

```
Maximize[{2 x1 + x2, 3 * x1 + 4 * x2 ≥ 10, 2 x1 - x2 ≤ 9, x1 - 3 x2 ≥ -4, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0},
 {x1, x2}]
```

$\left\{\frac{79}{5}, \left\{x1 \to \frac{31}{5}, x2 \to \frac{17}{5}\right\}\right\}$

```
PlMax = LinearProgramming[{-2, -1}, {{3, 4}, {2, -1}, {1, -3}},
  {{10, 1}, {9, -1}, {-4, 1}}]
```

$\left\{\frac{31}{5}, \frac{17}{5}\right\}$

```
Z[PlMax[[1]], PlMax[[2]]]
```

$\frac{79}{5}$

52. Сравнить решения, полученные различными способами.

Варианты:

№ вар	**ЗЛП**	**№ вар**	**ЗЛП**
1	$Z(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 9; \\ x_1 - 4x_2 \le 7; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**11**	$Z(x) = -4x_1 + 2x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24; \\ -x_1 + x_2 \ge -5; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
2	$Z(x) = x_1 - x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 2; \\ -x_1 + x_2 \ge -2; \\ x_1 + x_2 \le 14; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**12**	$Z(x) = -x_1 + x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le -2; \\ x_1 - 7x_2 \le 6; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	$Z(x) = 2x_1 - 6x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \ge -30; \\ x_1 - 2x_2 \ge 2; \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**13**	$Z(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3; \\ 2x_1 - x_2 \ge -6; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ вар	ЗЛП	№ вар	ЗЛП
4	$Z(x)=x_1+4x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1+x_2 \ge 1; \\ x_1-x_2 \ge -3; \\ x_1+4x_2 \le 17; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**14**	$Z(x)=4x_1+6x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2 \ge 12; \\ 4x_1+x_2 \le 20; \\ -3x_1+2x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	$Z(x)=x_1+2x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1-2x_2 \le 7; \\ x_1-x_2 \ge 4; \\ 2x_1+x_2 \le 25; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**15**	$Z(x)=2x_1+3x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 2; \\ 5x_1+2x_2 \le 15; \\ 2x_1+x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
6	$Z(x)=3x_1+8x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} -2x_1+x_2 \le 2; \\ 10x_1-4x_2 \le -1; \\ x_1+x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**16**	$Z(x)=2x_1-x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} -2x_1+5x_2 \ge -20; \\ 2x_1+x_2 \ge 2; \\ 5x_1+8x_2 \le 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
7	$Z(x)=3x_1-8x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le 7; \\ -2x_1+5x_2 \le -1; \\ x_1-5x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**17**	$Z(x)=3x_1-x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1+x_2 \ge 2; \\ 2x_1+x_2 \le 10; \\ 2x_1-x_2 \ge -6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
8	$Z(x)=x_1+x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 10; \\ x_1-2x_2 \le 4; \\ -x_1+x_2 \le -3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**18**	$Z(x)=-x_1+2x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1-x_2 \ge -1; \\ x_1+2x_2 \ge 4; \\ x_1+x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	$Z(x)=-3x_1+2x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} x_1-2x_2 \ge -2; \\ x_1+x_2 \ge 2; \\ x_1-x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**19**	$Z(x)=2x_1+x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 12; \\ -x_1+2x_2 \ge -4; \\ x_1+x_2 \ge 1; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
10	$Z(x)=-2x_1+3x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} -x_1+4x_2 \ge 1; \\ 3x_1+2x_2 \le 15; \\ x_1-3x_2 \ge -5; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	**20**	$Z(x)=-4x_1+3x_2 \to \text{extr}$ $\begin{cases} -3x_1+4x_2 \ge -12; \\ x_1+2x_2 \le 10; \\ 3x_1+2x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ТЕМА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП).

II часть. *Симплекс-метод решения ЗЛП.*

Цель занятия: изучение табличного симплекс-метода решения ЗЛП в нормальной форме и отработка умения использования возможностей систем *Excel* и *Mathematica* для решения ЗЛП.

Задание:

В соответствии с вариантом решить ЗЛП

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \text{extr},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

- табличным симплекс-методом;
- используя инструмент *Поиск решения* в ЭТ *Excel*;
- используя функции *Maximize (Minimize)* и *LinearProgramming* системы *Matematica*.

Порядок выполнения работы.

Решить ЗЛП в нормальной форме:

$$Z(x) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 13; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 11; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 14; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Реализация решения задачи (выполняется письменно).

Решение задачи симплекс-методом.

- преобразуем полученную ЗЛП к каноническому виду и выразим базисные переменные в системе ограничений

$$Z(x) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max \qquad Z(x) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 13; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_5 = 11; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 14; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0; x_5 \ge 0; x_6 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 13 - 3x_1 - x_2 - 2x_3; \\ x_5 = 11 - 2x_1 - 5x_2 - 3x_3; \\ x_6 = 14 - x_1 - 4x_2 - 2x_3; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0; x_5 \ge 0; x_6 \ge 0. \end{cases}$$

- 1 таблица: план $x^{(1)} = (0;0;0;13;11;14)$ – не оптимален, $Z(x^{(1)}) = 0$

БП	1	СП		
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4=$	13	3	1	2
$x_5=$	11	2	5	3
$x_6=$	14	1	4	2
Z	0	–1	–4	–3

разрешающий столбец: $\Delta = \max\{|-1|;|-4|;|-3|\} = \max\{1;4;3\} = 4$

разрешающая строка: $\theta = \min\left\{\frac{13}{1};\frac{11}{5};\frac{14}{4}\right\} = \frac{11}{5}$

- 2 таблица: план $x^{(2)} = \left(0; \frac{11}{5}; 0; \frac{54}{5}; 0; \frac{26}{5}\right)$ – не оптимален, $Z\left(x^{(2)}\right) = \frac{44}{5}$

БП	2	СП		
		$-x_1$	$-x_5$	$-x_3$
$x_4=$	$13-\frac{11\cdot 1}{5}=\frac{54}{5}$	$3-\frac{2\cdot 1}{5}=\frac{13}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2-\frac{1\cdot 3}{5}=\frac{7}{5}$
$x_2=$	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$x_6=$	$14-\frac{11\cdot 4}{5}=\frac{26}{5}$	$1-\frac{2\cdot 4}{5}=-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$2-\frac{4\cdot 3}{5}=-\frac{2}{5}$
Z	$0-\frac{11\cdot(-4)}{5}=\frac{44}{5}$	$-1-\frac{2\cdot(-4)}{5}=\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-3-\frac{3\cdot(-4)}{5}=-\frac{3}{5}$

разрешающий столбец: $\Delta = \max\left\{\left|-\frac{3}{5}\right|\right\} = \max\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}$

разрешающая строка: $\theta = \min\left\{\frac{54/5}{7/5}; \frac{11/5}{3/5}\right\} = \min\left\{\frac{54}{7}; \frac{11}{3}\right\} = \frac{11}{3}$

- 3 таблица: план $x^{(3)} = \left(0; 0; \frac{11}{3}; \frac{17}{3}; 0; \frac{20}{3}\right)$ – оптимален, $Z\left(x^{(3)}\right) = 11$

БП	3	СП		
		$-x_1$	$-x_5$	$-x_2$
$x_4=$	$\frac{54}{5}-\frac{\frac{11}{5}\cdot\frac{7}{5}}{3/5}=\frac{17}{3}$	$\frac{13}{5}-\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{5}}{3/5}=\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{5}-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{5}}{3/5}=-\frac{2}{3}$	$-\frac{7/5}{3/5}=-\frac{7}{3}$
$x_3=$	$\frac{11/5}{3/5}=\frac{11}{3}$	$\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$	$\frac{1/5}{3/5}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3/5}=\frac{5}{3}$
$x_6=$	$\frac{26}{5}-\frac{\frac{11}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}{3/5}=\frac{20}{3}$	$-\frac{3}{5}-\frac{\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}{3/5}=-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{5}-\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}{3/5}=-\frac{2}{3}$	$-\frac{2/5}{3/5}=-\frac{2}{3}$
Z	$\frac{44}{5}-\frac{\frac{11}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{3/5}=11$	$\frac{3}{5}-\frac{\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{3/5}=1$	$\frac{4}{5}-\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{3/5}=1$	$-\frac{-3/5}{3/5}=1$

Ответ: $x_1^0 = 0; x_2^0 = 0; x_3^0 = \frac{11}{3}$; $Z_{\max}\left(x^0\right) = 11$.

Реализация решения задачи в ЭТ *Excel*.

53. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).
54. Открыть файл (рабочую книгу) с именем ZLP.xls.
55. Переименовать лист в рабочей книге в ЗЛП_2.
56. Выполнить решение задачи, используя инструмент *Поиск решения*, с формированием отчета по результатам.

Реализация решения задачи в СКМ *Mathematica*.

57. Загрузить СКМ *Mathematica*:

Сетевые приложения → Математика → Mathematica

58. Сохранить файл с именем ZLP2.nb.
59. Выполнить решение задачи, используя функции *Maximize (Minimize)* и *LinearProgramming*.
60. Сравнить решения, полученные различными способами.

Варианты:

№ вар	**ЗЛП**	*№ вар*	**ЗЛП**
1	$Z(x)=2x_1+3x_2+5x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 70;\\ 2x_1+x_2-x_3\le 10;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**11**	$Z(x)=-2x_1+4x_2-x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 60;\\ 2x_1+x_2-x_3\le 50;\\ -x_1+x_2+2x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
2	$Z(x)=2x_1+4x_2-x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 30;\\ 2x_1-x_2\le 10;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**12**	$Z(x)=-2x_1-4x_2+x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3\le 30;\\ x_1-x_2\le 30;\\ x_1+x_2+x_3\le 60;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
3	$Z(x)=5x_1+4x_2-x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 30;\\ 2x_1-x_3\le 50;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**13**	$Z(x)=3x_1-2x_2+4x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\le 50;\\ -x_2+x_3\le 60;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
4	$Z(x)=3x_1+4x_2-x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\le 30;\\ -x_1+2x_2\le 40;\\ x_1+x_2-2x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**14**	$Z(x)=-x_1+2x_2-6x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\le 50;\\ -2x_1+x_2+x_3\le 20;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 30;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
5	$Z(x)=-x_1-2x_2+3x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\le 30;\\ 2x_1-x_2+x_3\le 20;\\ -x_1+2x_2-x_3\le 50;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**15**	$Z(x)=-2x_1-4x_2-x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_2+x_3\le 70;\\ 2x_1+x_2+2x_3\le 100;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 60;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
6	$Z(x)=7x_1-x_2+3x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 40;\\ 2x_1-x_3\le 70;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 20;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**16**	$Z(x)=x_1-2x_2-6x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\le 80;\\ -2x_1-x_2+x_3\le 50;\\ x_1-2x_2+x_3\le 30;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$

№ вар	ЗЛП	№ вар	ЗЛП
7	$Z(x)=2x_1-x_2+3x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 40;\\ 2x_1 \quad -x_3\le 70;\\ x_1-2x_2+x_3\le 20;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**17**	$Z(x)=-4x_1+2x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\le 50;\\ 2x_1+x_2-x_3\le 40;\\ x_1 \quad +x_3\le 30;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
8	$Z(x)=-x_1+4x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 90;\\ 2x_1-x_2+x_3\le 10;\\ -x_1+x_2+2x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**18**	$Z(x)=-2x_1+4x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 60;\\ 2x_1+x_2+x_3\le 50;\\ -x_1-x_2+2x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
9	$Z(x)=6x_1+2x_2-4x_3\to\max$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3\le 50;\\ -x_2+x_3\le 60;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**19**	$Z(x)=-5x_1-4x_2-x_3\to\min$ $\begin{cases} x_2-x_3\le 30;\\ x_1+2x_2 \quad \le 50;\\ x_1-x_2+2x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$
10	$Z(x)=3x_1-2x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 30;\\ x_1-x_2+x_3\le 50;\\ 2x_1 \quad -x_3\le 40;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$	**20**	$Z(x)=-2x_1+4x_2-5x_3\to\min$ $\begin{cases} x_2-x_3\le 70;\\ 2x_1 \quad -x_3\le 50;\\ -x_1+2x_2+x_3\le 60;\\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0.\end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ТЕМА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП).

III часть. *Двухфазный симплекс-метод решения ЗЛП.*

Цель занятия: изучение двухфазного табличного симплекс-метода решения ЗЛП и отработка умения использования возможностей систем *Excel* и *Mathematica* для решения ЗЛП.

Задание:

В соответствии с вариантом решить ЗЛП

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \text{extr},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

- табличным двухфазным симплекс-методом;
- используя инструмент *Поиск решения* в ЭТ *Excel*;
- используя функции *Maximize (Minimize)* и *LinearProgramming* системы *Matematica*.

Порядок выполнения работы.

Решить ЗЛП в нормальной форме:

$$Z(x) = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 20; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Реализация решения задачи (выполняется письменно).

Решение задачи симплекс-методом.

- данная ЗЛП представлена в каноническом виде. Однако первое равенство основной системы ограничений дано в непредпочтительном виде, поэтому введем искусственную переменную w_1. При этом второе равенство основной системы ограничений содержит предпочтительную переменную x_4.

$$Z(x) = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + \underline{w_1} = 20; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \underline{x_4} = 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ w_1 \ge 0. \end{cases}$$

- сформируем вспомогательную задачу – задачу первой фазы и преобразуем её к симплексной форме:

$$Z(\tilde{x}) = w_1 \to \min, \qquad\qquad Z(\tilde{x}) = w_1 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + w_1 = 20; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ w_1 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 20 - 2x_1 + x_2 - x_3; \\ x_4 = 10 + x_1 - 2x_2 - 2x_3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ w_1 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$Z(\tilde{x}) = 20 - 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} w_1 = 20 - 2x_1 + x_2 - x_3; \\ x_4 = 10 + x_1 - 2x_2 - 2x_3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ w_1 \ge 0. \end{cases}$$

- 1 таблица: план $\tilde{x}^{(1)} = (0;0;0;10;20)$ – не оптимален, $Z(\tilde{x}^{(1)}) = 20$

БП	1	СП		
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$w_1=$	20	2	1	–1
$x_4=$	10	–1	2	2
Z	20	2	–1	1

разрешающий столбец: $\Delta = \max\{2;1\} = 2$

разрешающая строка: $\theta = \min\left\{\frac{20}{2}\right\} = 10$

- 2 таблица: план $\tilde{x}^{(2)} = (10;0;0;20;0)$ – оптимален, $Z\left(\tilde{x}^{(2)}\right) = 0$

БП	2	СП	
		$-x_2$	$-x_3$
$x_1=$	$\frac{20}{2} = 10$	$\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_4=$	$10 - \frac{20\cdot(-1)}{2} = 20$	$2 - \frac{(-1)\cdot(-1)}{2} = \frac{3}{2}$	$2 - \frac{(-1)\cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$
Z	$20 - \frac{20\cdot 2}{2} = 0$	$-1 - \frac{2\cdot(-1)}{2} = 0$	$1 - \frac{2\cdot 1}{2} = 0$

- сформируем задачу второй фазы и преобразуем её к симплексной форме:

$$Z(x) = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max, \quad Z(x) = 40 - \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3; \\ x_4 = 20 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3; \\ x_4 = 20 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

- 1 таблица: план $x^{(1)} = (10;0;0;20)$ – не оптимален, $Z\left(x^{(1)}\right) = 40$

БП	1	СП	
		$-x_2$	$-x_3$
$x_1=$	10	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_4=$	20	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
Z	40	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$

разрешающий столбец: $\Delta = \max\left\{\left|-\frac{3}{2}\right|\right\} = \max\left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}$

разрешающая строка: $\theta = \min\left\{\frac{10}{1/2}; \frac{20}{5/2}\right\} = \min\{20;8\} = 8$

- <u>2 таблица</u>: план $x^{(1)} = (10; 0; 0; 20)$ – не оптимален, $Z\left(x^{(1)}\right) = 40$

БП	2	СП	
		$-x_2$	$-x_3$
$x_1=$	10	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_4=$	20	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
Z	40	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$

<u>*Ответ:*</u> $x_1^0 = 0; x_2^0 = 0; x_3^0 = \frac{11}{3}; \; Z_{\max}\left(x^0\right) = 11.$

Реализация решения задачи в ЭТ *Excel*.

61. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).
62. Открыть файл (рабочую книгу) с именем ZLP.xls.
63. Переименовать лист в рабочей книге в ЗЛП_3.
64. Выполнить решение задачи, используя инструмент *Поиск решения*, с формированием отчета по результатам.

Реализация решения задачи в СКМ *Mathematica*.

65. Загрузить СКМ *Mathematica*:

    Сетевые приложения → Математика → Mathematica

66. Сохранить файл с именем ZLP3.nb.
67. Выполнить решение задачи, используя функции *Maximize (Minimize)* и *LinearProgramming*.
68. Сравнить решения, полученные различными способами.

Варианты:

№ вар	ЗЛП	*№ вар*	ЗЛП
1	$Z(x) = 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40; \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 70; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**11**	$Z(x) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 30; \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 20; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
2	$Z(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 40; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 70; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**12**	$Z(x) = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 50; \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 30; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$
3	$Z(x) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60; \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 40; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$	**13**	$Z(x) = -2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 70; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 50; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0. \end{cases}$

№ вар	**ЗЛП**	**№ вар**	**ЗЛП**
4	$Z(x)=3x_1+4x_2-x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=30; \\ 2x_1-x_2+2x_4=10; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**14**	$Z(x)=-2x_1-4x_2-x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=30; \\ x_1-2x_2+2x_4=30; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$
5	$Z(x)=2x_1+3x_2+x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=70; \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=10; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**15**	$Z(x)=-x_1-2x_2-6x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=80; \\ -2x_1-x_3+2x_4=20; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$
6	$Z(x)=3x_1+x_2-2x_3+4x_4\to\max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_4=50; \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=40; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**16**	$Z(x)=x_1-2x_2+4x_3-2x_4\to\min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=80; \\ -x_2+x_3+2x_4=30; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$
7	$Z(x)=-3x_1-x_2+2x_3-x_4\to\min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=50; \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=40; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**17**	$Z(x)=x_1+4x_2+2x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4=50; \\ -x_2+2x_3+x_4=60; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$
8	$Z(x)=-2x_1+4x_2-x_3-3x_4\to\min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=60; \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=20; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**18**	$Z(x)=-2x_1+4x_2-x_3+5x_4\to\max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4=30; \\ -x_1+2x_2+x_4=40; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$
9	$Z(x)=x_1+4x_2-x_3+3x_4\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=30; \\ 2x_1-x_2+x_4=50; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**19**	$Z(x)=x_1+4x_2-x_3+3x_4\to\min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=100; \\ -x_1+2x_2-x_3=60; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$
10	$Z(x)=-2x_1+x_2-3x_3-x_4\to\min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=60; \\ -x_1+x_2+2x_3=40; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$	**20**	$Z(x)=-x_1+4x_2+x_3+5x_4\to\max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=90; \\ 2x_1+x_3+2x_4=10; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0;\ x_4\ge 0. \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

ТЕМА. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.

Цель занятия: изучение метода потенциалов решения транспортной задачи и отработка умения использования возможностей систем *Excel* для решения транспортных задач в форме ЗЛП.

Задание:

Постановка задачи:

В $m = 3$ пунктах отправления A_1, A_2 и A_3 сосредоточен однородный груз в количествах соответственно a_1, a_2 и a_3 единиц. Имеющийся груз необходимо доставить $n = 3$ потребителям B_1, B_2 и B_3, спрос которых выражается величинами b_1, b_2 и b_3 единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i-го ($i = 1, 2, 3$) пункта отправления в j-й ($j = 1, 2, 3$) пункт назначения. Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются.

Параметры задачи могут быть представлены в табличном форме в соответствии с вариантом:

		B_1	B_2	B_3
		b_1	b_2	b_3
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
A_3	a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Найти решение задачи в табличной форме

- методом потенциалов, построив начальный базисный план
  a. по правилу северо-западного угла

  или

  b. по правилу минимального элемента;
- используя инструмент *Поиск решения* в ЭТ *Excel*.

Порядок выполнения работы.

Решить транспортную задачу, представленную в табличной форме:

		B_1	B_2	B_3
		30	**50**	**60**
A_1	**40**	5	8	7
A_2	**80**	9	2	3
A_3	**20**	4	3	5

Реализация решения задачи (выполняется письменно).

Анализ транспортной задачи:

поставщики: общий запас: 40 + 80 + 20 = 140

потребители: общий спрос: 30 + 50 + 60 = 140

Поскольку общий запас равен общему спросу, то рассматриваемая модель транспортной задачи является закрытой моделью.

Замечание:

> Модель транспортной задачи называют ***закрытой***, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство
>
> $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$
>
> Модель транспортной задачи называют ***открытой***, если выполняется одно из условий:
>
> $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ или } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$

Для *разрешимости* транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовывать ее в закрытую, путем ввода

<u>в первом случае</u> фиктивного поставщика A_{m+1}, где $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$; $c_{m+1,j} = 0,\ j = \overline{1,n}$;

<u>во втором случае</u> фиктивного потребителя B_{n+1}, где $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$; $c_{i,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}$.

Построение начального плана[1]:

a. по правилу северо-западного угла

		B_1		B_2		B_3	
		30		**50**		**60**	
A_1	**40**	5		8		7	
			30		**10**		
A_2	**80**	9		2		3	
					40		**40**
A_3	**20**	4		3		5	
							20

Порядок построения:

$x_{11} = \min\{40, 30\} = 30$

$x_{12} = \min\{40-30, 50\} = 10$

$x_{22} = \min\{80, 50-10\} = 40$

$x_{23} = \min\{80-40, 60\} = 40$

$x_{33} = \min\{20, 60-40\} = 20$

Затраты:

$5\cdot 30 + 8\cdot 10 + 2\cdot 40 + 3\cdot 40 + 5\cdot 20 = 530$

b. по правилу минимального элемента

		B_1		B_2		B_3	
		30		**50**		**60**	
A_1	**40**	5		8		7	
			10				**30**
A_2	**80**	9		2		3	
					50		**30**
A_3	**20**	4		3		5	
			20				

Порядок построения:

$\min\{5,8,7,9,2,3,4,3,5\} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{22} = \min\{80, 50\} = 50$

$\min\{5,7,9,3,4,5\} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{23} = \min\{80-50, 60\} = 30$

$\min\{5,7,4,5\} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{31} = \min\{30, 20\} = 20$

$\min\{5,7\} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{11} = \min\{40, 30-20\} = 10$

$\min\{7\} = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{13} = \min\{40-10, 60-30\} = 30$

Затраты:

$5\cdot 10 + 7\cdot 30 + 2\cdot 50 + 3\cdot 30 + 4\cdot 20 = 530$

Реализация метода потенциалов для определения оптимального плана[2]:

Проверим начальный план на оптимальность:

		B_1		B_2		B_3		
		30		**50**		**60**		***u***
A_1	**40**	5		8		7	***-2***	***0***
			30	–	**10**	+		
A_2	**80**	9	***10***	2		3		***-6***
				+	**40**	–	**40**	
A_3	**20**	4	***3***	3	***-1***	5		***-4***
							20	
v		***5***		***8***		***9***		

Найдем потенциалы:

$u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 5 \Rightarrow v_1 = 5$

$u_1 + v_2 = 8 \Rightarrow v_2 = 8$

$u_2 + v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = -6$

$u_2 + v_3 = 3 \Rightarrow v_3 = 9$

$u_3 + v_3 = 5 \Rightarrow u_3 = -4$

---

[1] Построение приведено на лекции.

[2] В качестве начального плана выбран план, построенный по правилу северно-западного угла. Решение с начальным планом, построенным по правилу минимального элемента, рассмотрено на лекции.

Определим оценки для свободных клеток:

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (0 + 9) = -2 < 0 \qquad \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - (-4 + 5) = 3 > 0$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 9 - (-6 + 5) = 10 > 0 \qquad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 3 - (-4 + 8) = -1 < 0$$

Поскольку существуют свободные клетки с отрицательными оценками, то построенный план перевозок – не оптимальный.

Перейдем к нехудшему плану перевозок. Перспективными являются клетки (1; 3) и (3; 2). Наиболее потенциальной является клетка (1; 3). Строим для этой клетки цикл (по таблице):

$$(1;3)^+ \Rightarrow (2;3)^- \Rightarrow (2;2)^+ \Rightarrow (1;2)^- \Rightarrow (1;3)$$

Наибольшее количество груза в вершинах с отрицательным знаком: $\lambda = \min\{40,10\} = 10$. В результате смещения λ по циклу получаем новый план перевозок:

		***B*₁**		***B*₂**		***B*₃**		***u***
		30		**50**		**60**		
***A*₁**	**40**	5		8	*2*	7		***0***
			30				**10**	
***A*₂**	**80**	9	*8*	2		3		***-4***
				–	**50**	+	**30**	
***A*₃**	**20**	4	*1*	3	*-1*	5		***-2***
				+		–	**20**	
v		***5***		***6***		***7***		

Затраты:

$5 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 +$
$+ 5 \cdot 20 = 510$

Найдем потенциалы:

$u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 5 \Rightarrow v_1 = 5$

$u_1 + v_3 = 7 \Rightarrow v_3 = 7$

$u_2 + v_3 = 3 \Rightarrow u_2 = -4$

$u_2 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 6$

$u_3 + v_3 = 5 \Rightarrow u_3 = -2$

Определим оценки для свободных клеток:

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 8 - (0 + 6) = 2 > 0 \qquad \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - (-2 + 5) = 1 > 0$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 9 - (-4 + 5) = 8 > 0 \qquad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 3 - (-2 + 6) = -1 < 0$$

Поскольку существуют свободные клетки с отрицательными оценками, то построенный план перевозок – не оптимальный.

Перейдем к нехудшему плану перевозок. Перспективной является клетка (3; 2). Строим для этой клетки цикл (по таблице):

$$(3;2)^+ \Rightarrow (2;2)^- \Rightarrow (2;3)^+ \Rightarrow (3;3)^- \Rightarrow (3;2)$$

Наибольшее количество груза в вершинах с отрицательным знаком: $\lambda = \min\{50, 20\} = 20$. В результате смещения λ по циклу получаем новый план перевозок:

		***B*₁**		***B*₂**		***B*₃**		***u***
		30		**50**		**60**		
***A*₁**	**40**	5	*2*	8	***2***	7		***0***
			30				**10**	
***A*₂**	**80**	9	***8***	2		3		***-4***
					30		**50**	
***A*₃**	**20**	4	***2***	3		5	***1***	***-3***
					20			
v		***5***		***6***		***7***		

Затраты:

$5 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 50 +$
$+ 3 \cdot 20 = 490$

Найдем потенциалы:

$u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 5 \Rightarrow v_1 = 5$

$u_1 + v_3 = 7 \Rightarrow v_3 = 7$

$u_2 + v_3 = 3 \Rightarrow u_2 = -4$

$u_2 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 6$

$u_3 + v_2 = 3 \Rightarrow u_3 = -3$

Определим оценки для свободных клеток:

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 8 - (0 + 6) = 2 > 0 \qquad \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - (-3 + 5) = 2 > 0$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 9 - (-4 + 5) = 8 > 0 \qquad \Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 5 - (-3 + 7) = 1 > 0$$

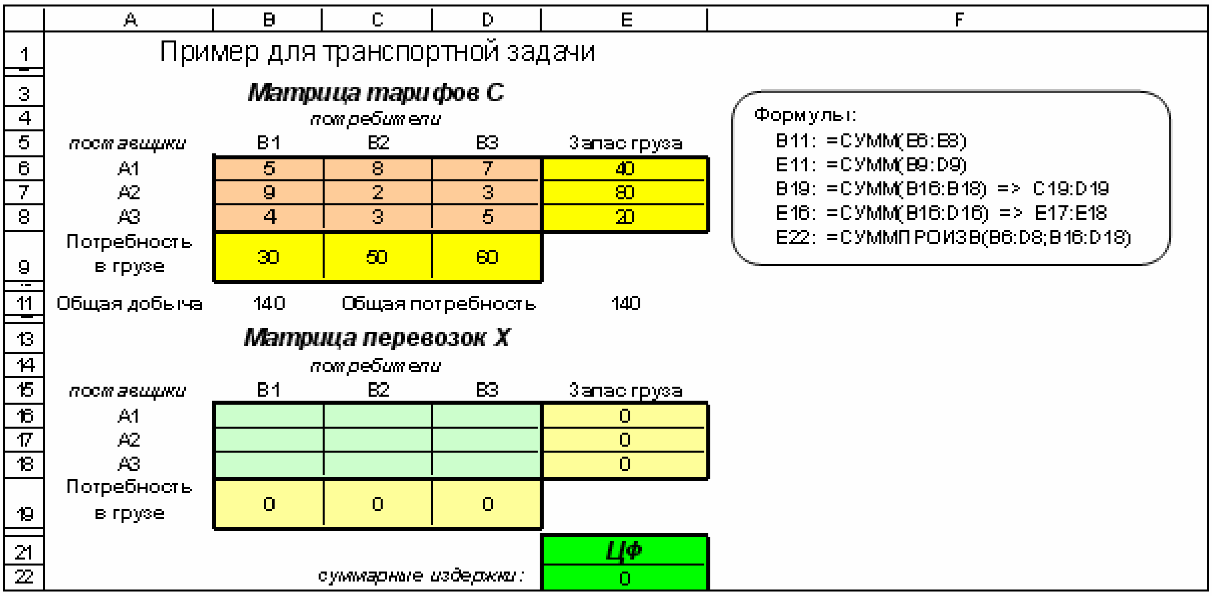
Поскольку отсутствуют свободные клетки с отрицательными оценками, то построенный план перевозок – оптимальный.

<u>*Ответ:*</u> $X^0 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 50 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$; $Z_{\min}\left(X^0\right) = 490$.

Реализация решения задачи в ЭТ *Excel*.

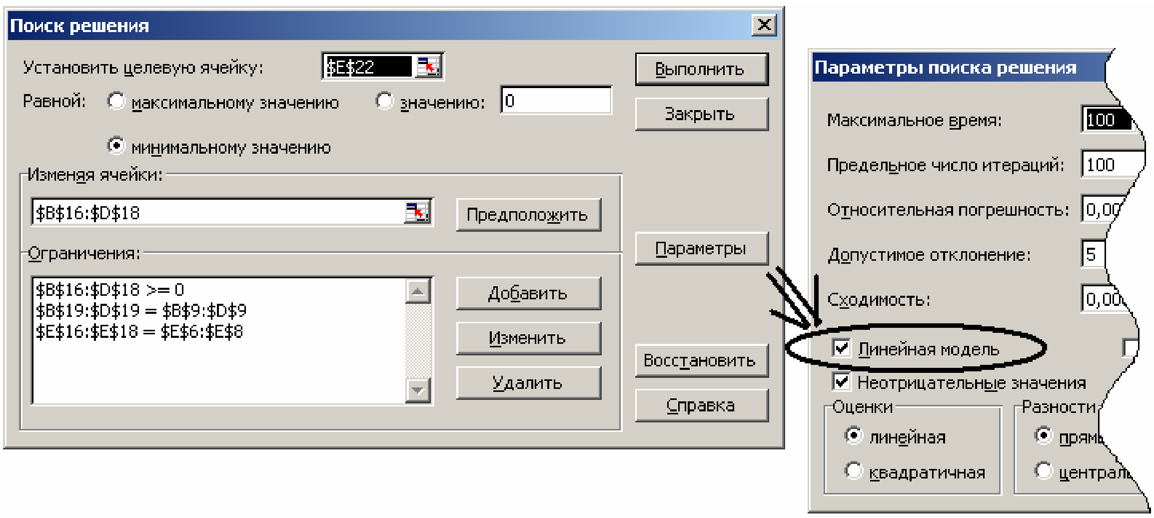
69. Загрузить ЭТ *Excel* (через пункт меню *Пуск* или панель быстрого запуска).
70. Открыть файл (рабочую книгу) с именем ZLP.xls.
71. Переименовать лист в рабочей книге в Т3.
72. Выполнить решение задачи, используя инструмент *Поиск решения*, с формированием отчета по результатам.

<u>1 шаг</u>: сформировать таблицу, ввести значения и формулы



	A	B	C	D	E	F
1	Пример для транспортной задачи					
3		Матрица тарифов С				
4			потребители			Формулы:
5	поставщики	B1	B2	B3	Запас груза	B11: =СУММ(B6:B8)
6	A1	5	8	7	40	E11: =СУММ(B9:D9)
7	A2	9	2	3	80	B19: =СУММ(B16:B18) => C19:D19
8	A3	4	3	5	20	E16: =СУММ(B16:D16) => E17:E18
9	Потребность в грузе	30	50	60		E22: =СУММПРОИЗВ(B6:D8;B16:D18)
11	Общая добыча	140	Общая потребность		140	
13		Матрица перевозок Х				
14			потребители			
15	поставщики	B1	B2	B3	Запас груза	
16	A1				0	
17	A2				0	
18	A3				0	
19	Потребность в грузе	0	0	0		
21					ЦФ	
22			суммарные издержки:		0	

<u>2 шаг</u>: задать данные в полях надстройки «*Поиск решения*»



3 шаг: сформировать *ответ* и *отчет по результатам*

	A	B	C	D	E
1	Пример для транспортной задачи				
3	***Матрица тарифов С***				
4	*потребители*				
5	*поставщики*	B1	B2	B3	Запас груза
6	A1	5	8	7	40
7	A2	9	2	3	80
8	A3	4	3	5	20
9	Потребность в грузе	30	50	60	
11	Общая добыча	140	Общая потребность		140
13	***Матрица перевозок Х***				
14	*потребители*				
15	*поставщики*	B1	B2	B3	Запас груза
16	A1	30	0	10	40
17	A2	0	30	50	80
18	A3	0	20	0	20
19	Потребность в грузе	30	50	60	
21					***Цф***
22			*суммарные издержки:*		490

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: Транспортная задача ЛП
Отчет создан: 06.12.2010 21:56:39

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$E$22	суммарные издержки: Цф	0	490

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$16	A1 B1	0	30
$C$16	A1 B2	0	0
$D$16	A1 B3	0	10
$B$17	A2 B1	0	0
$C$17	A2 B2	0	30
$D$17	A2 B3	0	50
$B$18	A3 B1	0	0
$C$18	A3 B2	0	20
$D$18	A3 B3	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$E$16	A1 Запас груза	40	$E$16=$E$6	не связан.	0
$E$17	A2 Запас груза	80	$E$17=$E$7	не связан.	0
$E$18	A3 Запас груза	20	$E$18=$E$8	не связан.	0
$B$19	Потребность в грузе B1	30	$B$19=$B$9	не связан.	0
$C$19	Потребность в грузе B2	50	$C$19=$C$9	не связан.	0
$D$19	Потребность в грузе B3	60	$D$19=$D$9	не связан.	0
$B$16	A1 B1	30	$B$16>=0	не связан.	30
$C$16	A1 B2	0	$C$16>=0	связанное	0
$D$16	A1 B3	10	$D$16>=0	не связан.	10
$B$17	A2 B1	0	$B$17>=0	связанное	0
$C$17	A2 B2	30	$C$17>=0	не связан.	30
$D$17	A2 B3	50	$D$17>=0	не связан.	50
$B$18	A3 B1	0	$B$18>=0	связанное	0
$C$18	A3 B2	20	$C$18>=0	не связан.	20
$D$18	A3 B3	0	$D$18>=0	связанное	0

Варианты:

№ вар	*Параметры транспортной задачи*														
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}
1	68	61	66	53	74	88	1	4	3	8	5	7	4	3	2
2	58	73	65	72	31	58	5	4	3	4	2	7	8	3	5
3	41	59	80	36	60	55	5	3	5	9	7	4	4	8	3
4	81	62	52	55	42	45	6	2	4	7	3	2	5	4	8
5	48	51	72	79	81	48	7	4	9	1	2	5	5	3	4
6	87	74	46	81	91	99	2	9	4	9	5	7	3	4	3
7	71	86	83	38	55	58	2	3	5	6	2	8	5	4	1
8	78	77	46	88	92	61	2	4	7	8	3	6	1	5	4
9	65	66	57	93	73	97	7	6	9	6	3	4	5	1	6
10	77	93	39	56	47	71	2	4	5	6	3	9	3	7	5
11	62	32	96	79	78	81	2	3	4	6	2	8	4	5	7
12	33	64	79	54	46	47	4	3	2	9	1	6	5	4	3
13	81	50	35	43	42	46	5	6	8	7	3	4	1	5	6
14	34	82	96	76	42	40	7	2	3	4	8	5	5	3	4
15	53	54	90	89	79	65	3	1	7	2	5	4	4	3	5
16	58	41	35	45	63	77	1	5	8	2	7	6	5	4	3

№ вар	*Параметры транспортной задачи*														
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}
17	73	38	90	55	37	80	2	5	3	8	4	7	3	6	9
18	84	93	37	66	87	92	3	7	4	2	5	1	6	9	8
19	77	81	88	68	53	97	1	6	5	2	3	4	7	2	6
20	93	46	64	80	76	73	2	9	7	3	5	8	7	4	3